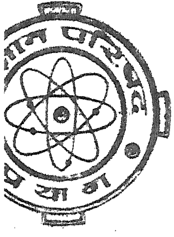
ISSN 0505-5806



# VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

# विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 37 January 1994 No. 1

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद् · इलाहाबाद

# विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 1, 1994

# भारतीय विज्ञान : उत्कृष्टता एवं उत्तरदायित्व

विज्ञान परिषद् प्रयाग का मैं अत्यन्त आभारी हूँ कि इसने मुझे मेरे गुरुभाई डॉ० आत्माराम से सम्बन्धित व्याख्यान देने के लिये चुना। इससे मैं गौरव का अनुभव कर रहा हूँ। डॉ० आत्माराम अत्यन्त उच्च कोटि के वैज्ञानिक थे। मेरे ऊपर तो उनकी विशेष अनुकम्पा थी। जब वे वैज्ञानिक तथा औद्योगिक अनुसंधान परिषद् के महानिदेशक नियुक्त हुए तो मेरे बधाई-पत्र के उत्तर में उनका यह वाक्य "जिस पर राम के चरण की कृपा हो उसकी सफलता में किसी को कैसे सन्देह हो सकता है" सचमुच उनके बड़प्पन तथा विनयशीलता का द्योतक है।

इस भाषण के लिये मैंने भारतीय विज्ञान कांग्रेस के इस वर्ष के मूल विषय (Focal theme) "**भारतीय विज्ञान : उत्कृष्टता एवं उत्तरदायित्व**" को ही चुना है। इस विषय में डॉ० आत्माराम जी की भी विशेष रुचि थी और सन् 1978 से 1980 तक प्रधानमन्त्री के विज्ञान सलाहकार तथा विज्ञान एवं तकनीकी की राष्ट्रीय समिति के अध्यक्ष के पद से भी उनका इस सम्बन्ध में महत्वपूर्ण योगदान था।

विज्ञान के शिक्षक तथा शोधकर्ता के रूप में मेरी तो यह स्पष्ट धारणा रही है कि अन्य कमियों के साथ ही साथ हमारे विज्ञान-शिक्षण के उच्चतम स्तर तक न पहुँच पाने के लिये हमारी सरकार की हिन्दी के प्रति ढुलमुल नीति उत्तरदायी है। यद्यपि हिन्दी क्षेत्रों में से अधिकांश में स्नातक कक्षाओं में पठन-पाठन का माध्यम हमारी राष्ट्रभाषा बन चुकी है परन्तु स्नातकोत्तर कक्षाओं में यह नीति न के बराबर अपनायी गयी है। इससे भी अधिक दु:ख की बात यह है कि नई पीढ़ी के लिये अधिक आकर्षक विषयों-उदाहरणत: इंजीनियरी तथा चिकित्सा विषयों—में हिन्दी की पैठ अभी तक नहीं हो पायी है। इसका कारण यह है कि यद्यपि विज्ञान के स्नातकोत्तर स्तर के लगभग सभी विषयों में विभिन्न राज्यों की अकादमियों ने पर्याप्त साहित्य उपलब्ध करा दिया है किन्तु इंजीनियरिंग तथा चिकित्सा का उत्तरदायित्व केन्द्र ने अपने ऊपर ले रखा है और इसकी प्रगति अपेक्षतया अत्यन्त मन्द है। यह कैसी विडम्बना की स्थिति है कि एक ओर हम अपनी नई पीढ़ी को स्नातक स्तर तक की विज्ञान के विषयों की शिक्षा हिन्दी तथा अन्य क्षेत्रीय भाषाओं के माध्यम से देने का प्रयत्न कर रहे हैं और उनसे आशा करते हैं कि उच्च शिक्षा में विज्ञान के विषयों को (स्नातकोत्तर, इंजीनियरी तथा चिकित्सा के क्षेत्रों में) वे अँग्रेजी भाषा के

81वें विज्ञान कांग्रेस अधिवेशन, जयपुर के अन्तर्गत विज्ञान परिषद्, इलाहाबाद द्वारा आयोजित पंचम डॉ० आत्माराम स्मृति व्याख्यान

माध्यम से समझने में इतने सक्षम हों कि अपने पठन-पाठन के सुअवसर का लाभ उठा सकें । यह कैसे सम्भव हो सकता है ?

मुझे याद आता है कि कई दशकों पूर्व का वह अवसर जब राजर्षि पुरुषोत्तम दास टण्डन ने मुझे मिर्जापुर में हिन्दी साहित्य सम्मेलन की विज्ञान-गोष्ठी में सभापति का स्थान प्रदान किया था । तब मैंने कहा था कि हमारी शिक्षा के स्तर की प्रगति में सबसे बड़ी बाधा हमारी भाषा की अस्पष्ट नीति है । विज्ञान जैसे विषय में कक्षा में ही नहीं वरन् बाल्यकाल से ही बालकों में जिज्ञासा उत्पन्न होती रहती है और पंडित नेहरू द्वारा वैज्ञानिक अभिरुचि पर इतना बल देने के बावजूद न तो विज्ञान का पर्याप्त मात्रा में सुबोध साहित्य उपलब्ध कराया जा सका है, न हमारे रेडियो, टी० वी० तथा अखबार ही ऐसा महत्व देते हैं जिससे विज्ञान का मामूली ज्ञान जनसाधारण को सरलता से उपलब्ध हो सके । ऐसी अवस्था में स्वाभाविक है कि बच्चे की जिज्ञासा को दूर कर पाना तो दूर रहा, उल्टे ऐसे अवैज्ञानिक विचारों का बीज बो दिया जाता है जो उसे आगामी जीवन में आगे ले जाने के बजाय उसे पीछे ले जाता है ।

इस अन्धकार में "विज्ञान परिषद्, प्रयाग" एक ऐसी प्रकाशमान संस्था है, जो 1913 से इस दिशा में निरन्तर कार्य करती आ रही है । इसने "विज्ञान" (मासिक) ही नहीं वरन् विगत् 36 वर्षों से "विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका" (त्रैमासिक) तथा सुगम साहित्य का नियमित प्रकाशन किया है । इधर कुछ वर्षों से भारतीय विज्ञान कांग्रेस में गोष्ठियों एवं अपने संस्थापकों की स्मृति में व्याख्यानों का भी आयोजन प्रारम्भ कर चुकी है । इससे राष्ट्रभाषा हिन्दी की लौ मन्द नहीं होने पाई ।

अपनी बात कहना अधिक शोभा नहीं देता परन्तु उच्चतम स्तर पर आधुनिक ज्ञान की अभिव्यक्ति में हिन्दी की सक्षमता को सिद्ध करने के लिए वर्तमान वक्ता ने राजस्थान ग्रन्थ अकादमी, जयपुर से "रसायन समीक्षा" जैसी त्रैमासिक पत्रिका निकाली और रसायन शास्त्र जैसे गूढ़ विषय को उच्चतम स्तर पर हिन्दी में व्यक्त करने की शक्ति को सिद्ध कर दिया है । अब तो कर्नाल तथा दिल्ली से भी ऐसे प्रयास हो रहे हैं ।

विज्ञान के पठन-पाठन एवं अनुसंधान के क्षेत्र में भाषा की दृष्टि से जो कठिनाइयाँ हैं उनका संक्षेप में उल्लेख करने के बाद मैं अन्य परिस्थितियों पर ही अपना भाषण केन्द्रित करूँगा ।

अपने राष्ट्र की अति-उज्ज्वल थाती के होते हुये भी परतन्त्रता की जंजीर में जकड़ा होने के कारण हमारा देश 18वीं-19वीं शताब्दी के परा-औद्योगिक युग (Post Industrial Era) में सम्पूर्ण विश्व में आधुनिक विज्ञान की अद्वितीय प्रगति होने के बावजूद उससे अछूता रहा । यह भारत के वैज्ञानिक अभियान में सबसे बड़ा अवरोध रहा है । किन्तु इसे देश का सौभाग्य ही कहा जायेगा कि स्वतन्त्रता के कुछ दशकों पहले से ही आशुतोष मुकर्जी जैसे दूरदर्शी महानुभावों के प्रयासों से वैज्ञानिक विषयों के पठन-पाठन पर विशेष बल दिया गया तथा सही नीति निर्धारित की गयी । साथ ही अति प्रतिकूल वातावरण में भी हमारे कुछ मेधावी वैज्ञानिकों ने जैसे रामानुजन, सी० वी० रामन, महलनबीस, पी० सी० रे, होमी जहाँगीर भाभा, बीरबल साहनी, विक्रम साराभाई, एस० एन० बोस, एन० आर० धर, जे० सी० बोस, एम० एन० साहा, तथा एस० एस० भटनागर ने अन्तर्राष्ट्रीय साधनों एवं वातावरण के

नितान्त अभाव में उच्चतम अन्तर्राष्ट्रीय स्तर का ऐसा कार्य सम्पादित किया कि उन्होंने नोबेल पुरस्कार तथा संसार की सर्वश्रेष्ठ विज्ञान अकादमियों के फेलो के रूप में यश अर्जित करके न केवल अपने को अपितु देश को विश्व के मानचित्र पर ला कर खड़ा कर दिया। हमारे देश के विज्ञान इतिहास की यह सबसे बड़ी उपलब्धि रही है।

**स्वातन्त्र्योत्तर युग अथवा नेहरू युग**

प्रसन्नता की बात है कि स्वतन्त्रता प्राप्ति के बहुत पहले से ही हमने विज्ञान एवं वैज्ञानिक पद्धतियों में विश्वास करना शुरू कर दिया था और नेहरू जी ने मेघनाद साहा जैसे वैज्ञानिकों को वैज्ञानिक विकास की योजनाओं पर चिन्तन करने के लिए प्रेरित किया था। स्वाभाविक ही था कि स्वतन्त्रता मिलते ही नेहरू जी के नेतृत्व में राष्ट्रीय विकास में विज्ञान तथा तकनीक के महत्व को समुचित स्थान देते हुए सी० एस० आई० आर० एवं आई० सी० ए० आर० के अन्तर्गत प्रयोगशालाओं की एक श्रृंखला का शुभारम्भ हुआ, साथ ही रक्षा विभाग तथा परमाणु ऊर्जा आयोग का गठन किया गया। यह अवश्य दुख की बात है कि इन प्रयोगशालाओं के विकास के साथ ही साथ उच्च शिक्षा-संस्थाओं में विज्ञान के शिक्षण, शिक्षा के माध्यम, शिक्षा के स्तर एवं अनुसन्धान कार्य पर समुचित ध्यान नहीं दिया गया।

राष्ट्रीय प्रगति में विज्ञान तथा तकनीक के महत्व को सम्बल देने के लिये सन् 1958 में 'विज्ञान नीति प्रस्ताव" (Science Policy Resolution) को संसद द्वारा अपनाया गया। इसमें स्वीकार किया गया कि तकनीकी, कच्चा माल तथा पूँजी—इन तीन कारकों के मेल-जोल पर ही वर्तमान युग की सम्पन्नता अवलम्बित है। अगस्त 1963 में हमारे देश में वैज्ञानिकों, तकनीकीविदों एवं विज्ञान-शिक्षकों के एक सम्मेलन में (जिसमें मैं भी शामिल था) नेहरू जी की वैज्ञानिक अभिरुचि की स्पष्ट झलक देखने को मिली। इस सम्मेलन में भाभा, भगवन्तम, कोठारी, महलनबीस तथा जहीर ने सक्रिय रूप से भाग लिया। ढाई दिनों तक चलने वाले इस सम्मेलन में नेहरू जी बराबर उपस्थित रहे जिससे विज्ञान तथा तकनीक के क्षेत्रों को बहुत प्रोत्साहन मिला।

**नेहरू परवर्ती युग में विज्ञान तथा तकनीकी**

पं० नेहरू के बाद भी वैज्ञानिक प्रयोगशालाओं को संरचनात्मक सहायता (Infrastructural Support) बराबर मिलती रही। सन् 1973 में विज्ञान एवं तकनीक को भी राष्ट्रीय पंचवर्षीय योजना से एकीकृत करने का प्रस्ताव पारित किया गया, जिससे देश में विज्ञान तथा तकनीकी को राष्ट्रीय प्रगति में विशेष योगदान करने का अवसर मिला। 1983 में केबिनेट की विज्ञान सलाहकार समिति के प्रयासों के फलस्वरूप "तकनीकी नीति" घोषित की गयी।

1985-90 की अवधि में राजीव गाँधी ने "मिशन केन्द्रित शोधकार्यों" तथा "नीलाकाश शोध" (Blue Sky Research) पर बल दिया। इस काल में कई ज्वलन्त समस्याओं पर विशेष ध्यान देने के लिये वैज्ञानिकों को प्रेरित किया गया, जिनमें पीने के पानी की समस्या प्रमुख थी। "गंगा क्रियान्वयन योजना" भी इसी काल में आरम्भ हुई।

इतनी सब प्रगति होने के बाद विशेष चिन्ता की बात यह है कि आठवीं पंचवर्षीय योजना के बजट में विज्ञान तथा तकनीकी के लिये उपलब्ध अंश को 1.1 प्रतिशत से घटाकर 0.9 प्रतिशत कर दिया गया है।

पिछड़े हुए शोध संस्थानों एवं अधिकोश विश्वविद्यालयों को तो पहले भी नगण्य अनुदान प्राप्त होता था, परन्तु बजट में इस अप्रत्याशित कटौती से अपेक्षाकृत अधिक अनुदान पाने वाली अधिकांश प्रयोगशालाओं तथा संस्थानों में निराशाजनक वातावरण का सूत्रपात हुआ है। यह अत्यन्त दुर्भाग्य की बात तो है ही कि वैज्ञानिकों तथा सरकार के मध्य किसी प्रकार का वार्तालाप या विचार-विमर्श हुए बिना ही अनुदानों में की गई यह कटौती हमारे विज्ञान तथा तकनीक के प्रचार-प्रसार के कार्यक्रमों के लिये बहुत घातक सिद्ध होगी। वर्तमान मुक्त-बाजार अर्थतन्त्र (Open market economy) की विचारधारा में यह आकांक्षा की जाने लगी है कि वैज्ञानिक संस्थान अपने साधन स्वयं जुटावें जिसका अप्रत्यक्ष रूप से यह अर्थ होता है कि व उपभोक्ता उद्योगों से सहायता माँगें। दुर्भाग्यवश भारत में उद्योग अभी तक ऐसी स्थिति में नहीं हैं कि वे शोध के क्षेत्र में उल्लेखनीय सहायता पहुँचा सकें।

हमारे नये विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी मन्त्री ने 1992-93 में एक नयी तकनीकी नीति का सूत्रपात किया है जिसे लगभग सभी संस्थाओं तथा सम्बन्धित व्यक्तियों के पास परामर्श हेतु भेजा गया है। परन्तु ऐसा लगता है कि 1956 तथा 1983 की ही तरह इसमें सिर्फ कोरी आकांक्षायें ही निर्देशित की गई हैं, जब कि आज नीति-निर्धारण से आगे बढ़कर सचमुच सुनिश्चित आधार पर सक्षमता से क्रियान्वयन करने की परम आवश्यकता है।

**विज्ञान-उत्कृष्टता की दिशा में भारत**

इस तथ्य पर तो हमें स्वाभाविक गर्व होता है कि स्वतन्त्रता पूर्व हमारे कतिपय वैज्ञानिकों द्वारा उत्कृष्ट उपलब्धियाँ प्राप्त की गयीं थीं। स्वतन्त्रता के बाद विज्ञान तथा तकनीकी के क्षेत्र में विशेषकर-खाद्यान्न उत्पादन, परमाणु ऊर्जा तथा अन्तरिक्ष अनुसन्धान में महत्वपूर्ण उपलब्धियाँ मिली हैं, तथापि अन्तर्राष्ट्रीय प्रतियोगिता के वर्तमान वातावरण में आत्मसन्तोष के लिये अभी कोई स्थान नहीं होना चाहिये, क्योंकि विज्ञान के क्षेत्र में संसार के अग्रणी देशों में बहुत तीव्र गति से प्रगति हो रही है और हम अपेक्षतया और भी अधिक पिछड़ते जा रहे हैं।

साथ ही साथ इस दिशा में यह अहम प्रश्नचिन्ह हमारे सामने प्रस्तुत है कि क्या हम अभी तक अपनी वैज्ञानिक प्रतिभाओं से उचित लब्धि प्राप्त करने योग्य आवश्यक वातावरण तथा मनःस्थिति विकसित करने में सक्षम हो पाये है? क्या कारण है कि हमारे वैज्ञानिकों तथा तकनीकविदों में विदेशों के लिये पलायन की प्रवृत्ति अब तो युवा-पीढ़ी तक ही सीमित न रहकर प्रौढ़ वैज्ञानिकों को भी अपनी चपेट में लेती प्रतीत होती है? यह भारतीय विज्ञान की प्रगति में स्पष्ट रूप से बाधक है और हमें शीघ्र ही इसका समाधान ढूंढना होगा।

दुर्भाग्यवश विश्वविद्यालयों में हो रहे शोध-कार्यों को आजकल "द्वितीय श्रेणी के शोध" की संज्ञा दी जा रही है या कभी-कभी तो इसे "विश्वविद्यालयी शोध" कह कर इसकी अवमानना की जाती है। इस

और यह स्मरण रखना होगा कि विभिन्न वैज्ञानिक तथा तकनीकी अनुसन्धान संस्थानों में शोध-वैज्ञानिकों तथा शोध-सहायकों को प्रयोगशालों की विशिष्ट सुविधायें तो मिल सकती हैं, किन्तु विश्वविद्यालयों जैसा स्वतन्त्र बौद्धिक वातावरण उपब्ध नहीं हो सकता। विश्वविद्यालय असहमति तथा असम्मति हेतु आदर्श स्थान सिद्ध हो सकते हैं, ज्ञान के विभिन्न नये पक्षों को उजागर करने के साहसी प्रयासों के लिये ऐसी प्रवृत्तियाँ आवश्यक भी हैं। सह-शोध या सह-ज्ञान विधि के इस परिवेश में शोध-छात्र अपने स्तर का श्रेष्ठ योगदान कर आत्म-विश्वास प्राप्त करने का प्रयास करते हैं जबकि अनुसन्धान संस्थानों में शोधकर्ता बड़े वैज्ञानिकों द्वारा निर्धारित कार्यों को ही सम्पादित करते हैं। इस प्रकार विश्वविद्यालय बहुआयामी प्रभाव के दृष्टिकोण से शोध कार्य/शोध-प्रशिक्षण एवं कम लागत पर शोध समस्याओं के समाधान हेतु आदर्श स्थान हैं। भारत में विज्ञान की उत्कृष्टता के दिशा-निर्देशन में यह महत्वपूर्ण कदम होगा कि इन विश्व-विद्यालयों तथा इनके वैज्ञानिकों की ओर विशेष ध्यान दिया जाय। उन्हें सभी सुविधायें सुलभ कराई जायँ और देश की युवा पीढ़ी के उत्तमोत्तम मस्तिष्कों को विज्ञान के क्षेत्र में प्रशिक्षित किया जाय। गुरु-शिष्य की परम्परा से आज भी राष्ट्रीय मंगल हो सकता है।

टाटा इंस्टीट्यूट ऑफ फण्डामेण्टल रिसर्च, इण्डियन इंस्टीट्यूट ऑफ साइन्स तथा कतिपय इण्डियन इंस्टीट्यूट ऑफ टेक्नोलॉजी संस्थानों में हो रहे उच्चस्तरीय शोध के बावजूद साधारणतया विश्वविद्यालयों में हो रहे अध्ययन तथा शोध कार्यों का विस्तार अभी तक अत्यल्प ही रहा है। संस्थाओं से निकलने वाले स्नातकों का स्तर बहुत गिर चुका है तथा लगातार गिरता ही जा रहा है। राष्ट्र के विकास में रुचि लेने के वाले प्रत्येक व्यक्ति के लिये यह अत्यन्त चिन्ता का विषय होना चाहिये। अधिकांश मेधावी स्नातक तो विदेशों की ओर पलायन अथवा प्रशासनिक सेवा के आकर्षण के शिकार होते जा रहे हैं। फलतः अपने शिक्षण संस्थानों के वातावरण को बदलकर अपनी नयी पीढ़ी में एक आशावादी लहर उत्पन्न करना नितान्त आवश्यक हो गया है और इस ओर वरिष्ठ वैज्ञानिकों एवं अनुदान देने वाली संस्थाओं को विशेष ध्यान देना आवश्यक है।

## उपसंहार

उपर्युक्त संक्षिप्त विवेचन से स्पष्ट है कि पर्याप्त साधनों के अभाव में भी कतिपय वैज्ञानिकों एवं कुछ संस्थाओं ने बहुत उच्च कोटि का सराहनीय कार्य सम्पादित करने में सफलता पायी है। परन्तु भारतवर्ष जैसे महान देश के लिये केवल कुछ उपलब्धियों पर सन्तोष कर लेना उचित न होगा।

पुरानी उपलब्धियों के अतिरिक्त हमारा देश प्रायः इस तथ्य को अपने लिये गौरव की बात मानता है कि देश के वैज्ञानिकों एवं प्रशिक्षित तकनीकज्ञों की संख्या के आधार पर संसार में हमारा तीसरा स्थान है। परन्तु समाज और प्रशासन को अपने हृदय टटोलने चाहिये कि क्या हम इतनी बड़ी संख्या के वैज्ञानिकों एवं तकनीकज्ञों के समुचित कार्य के लिये वातावरण सृजित कर पाये हैं? क्या प्रशासन उनको अपने 1958 के "साइंस पालिसी" प्रस्ताव के अनुकूल आदरपूर्ण ढंग से कार्य करने की सुविधायें प्रदान कर पाया है? बहुत दीर्घकाल से आज तक विश्व के समस्त देशों में विज्ञान में योगदान के लिए विश्व-विद्यालयों एवं महाविद्यालयों की भूमिका को सर्वोच्च आँका गया है क्योंकि इन संस्थाओं में न केवल

उच्चतम स्तर का मौलिक कार्य हो सकता है, वरन् नये विद्यार्थियों और नई पीढ़ी के अनुसंधानकर्ताओं के मार्ग-निर्देशन में और उनमें वांछित मानसिकता पैदा करने के लिए इन्हीं संस्थानों का अपना अनूठा उत्तरदायित्व भी है।

यह भी स्पष्ट कर देना उचित होगा कि हमें हर कार्य के लिए प्रशासन का मुखापेक्षी नहीं रहना चाहिये। उदाहरण के लिये पठन-पाठन की भाषा के लिए प्रशासन से नगण्य सहायता की परिस्थिति में भी "विज्ञान परिषद्" ऐसी संस्थाओं का अनूठा योगदान रहा है जो हम सब के लिये एक नया कीर्तिमान स्थापित करता है। इसी तरह वैज्ञानिक अनुसंधान के क्षेत्र में भी साधनों की अपर्याप्तता को कुछ सीमा तक वैयक्तिक उत्साह और पारस्परिक सहयोग से पाटा जा सकता है।

वर्तमान अन्तर्राष्ट्रीय होड़ के युग में केवल वैयक्तिक उत्साह से उच्चतम प्रगति असम्भव सी होती जा रही है और इसके लिए हमारे वरिष्ठ अनुसन्धानकर्ताओं एवं प्रशासन से प्रत्यक्ष रूप से जुड़े हुए वैज्ञानिकों का यह नैतिक कर्तव्य है कि नयी पीढ़ी के लिए केवल आदर्श ही प्रस्तुत न करें वरन् उनके लिए सुख-सुविधाओं और साधनों के लिए भी समाज एवं प्रशासन को पूर्णतया प्रेरित करें

हर्ष की बात है कि यद्यपि वर्तमान परिस्थितियाँ सन्तोषजनक नहीं प्रतीत होतीं तथापि अभी निराशा की स्थिति उत्पन्न नहीं हुई है। राष्ट्र की प्रगति और उत्थान के लिए इन बुझती सी चिनगारियों को दुबारा प्रज्ज्वलित करना होगा जो वैज्ञानिकों के कठिन मार्ग को आलोकित कर सकें। यद्यपि सभी स्थानों पर एकसाथ उच्चकोटि का कार्य आरम्भ नहीं हो पायेगा, तथापि कुछ आशावादी बिन्दु स्थलों पर ही इस प्रकार की प्रगति औरों के लिये प्रोत्साहन का स्रोत बन सकती है और इस प्रकार पारस्परिक उपलब्धियों एवं सफलताओं से प्रेरित हो, देश के निर्माण के लिये एक आदर्श वातावरण सृजित किया जा सकता है।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 1, 1994

# जैकोबी श्रेणी की नारलुंड संकलनीयता

**बी० के० ब्यौहार तथा श्यामसुन्दर खरे**
गणित अध्ययनशाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन (म० प्र०)

[ प्राप्त—नवम्बर 17, 1993 ]

## सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में जैकोबी श्रेणी की नारलुंड संकलनीयता पर एक प्रमेय सिद्ध किया गया है, जिसमें चौधरी[3] द्वारा स्थापित प्रमेय का सामान्यीकरण किया गया है।

**1.** माना कि $\Sigma U_n$ दी हुई श्रेणी है जिसके आंशिक योगफलों का अनुक्रम $\{s_n\}$ है। मान कि $\{P_n\}$ वास्तविक या संकुल चरों का अनुक्रम है तो हम लिखेंगे कि

$$P_n = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n,\ p_n \neq 0$$

अनुक्रमशः रूपान्तर

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k\, s_{n-k}}{p_n}$$

द्वारा $\{p_n\}$ द्वारा जनित अनुक्रम $\{s_n\}$ के नारलुंड माध्यों का अनुक्रम $\{t_n\}$ परिभाषित होता है। श्रेणी $\Sigma U_n$ योगफल $s$ में संकलनीय $(N, p_n)$ कहलाती है यदि $\lim_{n \to 0} t_n$ का अस्तित्व हो और $s$ के तुल्य हो।

**2.** माना $F(x)$ एक फलन है जो अन्तराल $[-1, 1]$ में इस प्रकार परिभाषित है कि

$$(1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} f(x) \in [-1, 1]$$

$f(x)$ से सम्बद्ध जैकोबी श्रेणी[2]

$$f(x) \sim \Sigma a_n\, p_n^{(\alpha, \beta)}(x) \tag{2.1}$$

है, जहाँ

$$a_n = g_n \int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} f(x)\, p_n^{(\alpha, \beta)}(x)\, dx \tag{2.2}$$

$$g_n = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}} \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}$$

$p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ जैकोबी बहुपद है ।

अब हम लिखेंगे

$$F(\phi)=[f(\cos\phi)-A]\,(\sin\phi/2)^{2\alpha+1}\,(\cos\phi/2)^{2\beta+1}$$

श्रेणी (2.1) की संकलनीयता पर विचार करते हुए चौधरी[3] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है।

**प्रमेय**

माना कि $\{p_n\}$ एक ऐसा अनृण तथा अवर्धमान अनुक्रम है कि

$$n^{\alpha+1/2}=0(p_n) \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty \tag{2.3}$$

यदि
$$\psi(t)=\int_0^t |F(\phi)|\,d\phi=0\left(\frac{p_j\, t^{2\alpha+1}}{p_j}\right) \text{ज्यों-ज्यों } t\to 0 \tag{2.4}$$

तो $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$, $B>-\frac{1}{2}$ के लिए श्रेणी (2.1) $x=+1$ पर $A$ पर $(N, p_n)$ संकलनीय है बशर्ते कि ऐन्टीपोल प्रतिबन्ध तुष्ट हो अर्थात्

$$\int_{-1}^{b} (1+x)^{\beta/2-3/4} f(x)\,dx \tag{2.5}$$

$b$ स्थिर है। प्रस्तुत प्रपत्र में हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे ।

## 3. प्रमेय

माना कि $\{p_n\}$ एक ऐसा वास्तविक अनृण एवं अवर्धमान अनुक्रम है कि

$$\psi(t)=\int_0^t |F(\phi)|\,d\phi=0\left(\frac{\lambda_j\, p_j\, t^{2\alpha+1}}{\theta(p_j)}\right) \text{ ज्यों-ज्यों } t\to 0 \tag{3.1}$$

$$\tau=\frac{1}{t}$$

जहाँ $\lambda(t)$, $\theta(t)$ वर्धमान फलन तथा

$$\lambda_n p_n=0(\theta(p_n)) \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty \tag{3.2}$$

$$n^{\alpha+1/2}=0(p_n) \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty \tag{3.3}$$

$$\sum_{a}^{n} \left(\frac{p_k}{k^{\alpha+3/2}}\right)=0 \left(\frac{p_n}{n^{\alpha+1/2}}\right) \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty \tag{3.4}$$

तब श्रेणी (2.1) $x=+1$ पर $A$ की ओर संकलनीय है बशर्ते

$$-\tfrac{1}{2}<\alpha<\tfrac{1}{2},\ B>-\tfrac{1}{2}$$

तथा ऐन्टीपोल प्रतिबन्ध

$$\int_{-1}^{b} (1+x)^{B/2-3/4}\,|f(x)|\,dx<\infty \tag{3.5}$$

$b$ स्थिर है, सन्तुष्ट हो।

**4.** प्रमेय की उपपत्ति के लिए निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

**प्रमेयिका 1**[2]

$\alpha$, $\beta$ वास्तविक, यादृच्छिक तथा $c$ स्थिर धनात्मक चर होने पर

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=\theta^{-\alpha-1/2}\ C/n\leqslant\theta\leqslant\pi/2 \tag{4.1}$$

$$0(n^{\alpha})\ 0\leqslant\theta\leqslant c/n$$

**प्रमेयिका 2**

माना कि

$$N_n(\phi)=\frac{2^{\alpha+B+1}}{p_n}\ \Sigma p_k\ \lambda_{n-k}\, P_{n-k}{}^{(\alpha+1+B)}(\cos\phi)$$

जहाँ

$$\lambda_n=2^{-\alpha-B-1}\ \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\ \Gamma(n+\beta+1)}=\frac{2^{-\alpha-\beta-1}\ n^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

तब $0\leqslant\phi\leqslant 1/n$ के लिए

$$|N_n(\phi)|=0(n^{2\alpha+2}) \tag{4.2}$$

$1/n\leqslant\phi\leqslant\pi-1/n$ के लिए

$$|N_n(\phi)|=0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\right)\left[p_{(n/\phi)}\,(\sin\phi/2)^{-\alpha-3/2}\,(\cos\phi/2)^{-B-1/2}\right]$$

$$+0(n^{\alpha-1/2})\,[(\sin\phi/2)^{-\alpha-5/2}\,(\cos\phi/2)^{-\beta-3/2}] \tag{4.3}$$

$\pi-1/n\leqslant\phi\leqslant\pi$ के लिए

$$|N_n(\phi)|=0(n^{\alpha+\beta+1}) \tag{4.4}$$

इसकी उपपत्ति के लिए गुप्ता[1] का प्रपत्र देखें ।

**प्रमेयिका 3**

ऐन्टीपोल प्रतिबन्ध के द्वारा हमें ज्ञात होता है कि

$$\int_{a=cos-1/2}^{\pi} (\cos \phi/2)^{\beta-1/2} \,|f(\cos \phi)-A|\, d\phi<\infty \tag{4.5}$$

जिससे आगे सिद्ध होना है कि

$$\int_{0}^{1/n} (t)^{\beta-1/2} \,|f(-\cos t)-A|\, dt=0(1) \tag{4.6}$$

गुप्ता[1] के प्रपत्र में इसे सिद्ध किया है ।

## 5. प्रमेय की उपपत्ति

$x=1$ पर श्रेणी (2.1) का $n$वां आंशिक योगफल निम्नवत् दर्शाया जाता है

$$s_n(1)=2^{\alpha+\beta+1} \lambda_n \int_0^{\pi} (\sin \phi/2)^{2\alpha+1} (\cos \phi/2)^{2\beta+1} p_n^{(\alpha+1,B)} (\cos \phi) f(\cos \phi)\, d\phi \tag{5.1}$$

अत:

$$s_n(1)-Q=2^{\alpha+B+1} \lambda_n \int_0^{\pi} (\sin \phi/2)^{2\alpha+1} (\cos \phi/2)^{2\beta+1} p_n^{(\alpha+1,B)} (\cos \phi)\, [f(\cos \phi)-A]\, d\phi$$

$$=2^{\alpha+B+1} \lambda_n \int_0^{\pi} |F(\phi)\, p_n^{(\alpha+1,B)} (\cos \phi)\, d\phi \tag{5.2}$$

अब

$$t_n=\frac{1}{p_n} \sum_{k=0}^{n} p_k\, s_{n-k}(1)$$

अत:

$$t_n-A=1/p_n \sum_{k=0}^{n} p_k[s_{n-k}(1)-A]$$

$$=1/p_n\, \Sigma\, p_k 2^{\alpha+B+1} \lambda_{n-k} \int_0^{\pi} F(\phi)\, p_{n-k}^{(\alpha+1,B)} (\cos \phi)\, d\phi$$

$$=\int_0^{\pi} N_n(\phi)\, F(\phi)\, d\phi \tag{5.3}$$

प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हम सिद्ध करेंगे कि

$$I(\phi)=\int_0^{\pi} N_n(\phi)\, F(\phi)\, d\phi=0(1) \quad \text{ज्यों ज्यों } n\to\infty \tag{5.4}$$

हम लिखेंगे

$$I(\phi)=\left(\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi-1/n}+\int_{\pi-1/n}^{\pi}\right) N_n(\phi)\, F(\phi)\, d\phi$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4 \text{ (माना)} \tag{5.5}$$

अब

$$|I_1|=\int_0^{1/n} |N_n(\phi)|\, |F(\phi)|\, d\phi$$

$$=0(n^{2\alpha+2})\int_0^{1/n} |F(\phi,|\, d\phi \tag{4.2}$$

$$=0(n^{2\alpha+2})\, 0\left(\frac{\lambda_n p_n\, n^{-2\alpha-1}}{\theta(p_n)}\right)$$

$$=0\left(\frac{(\lambda_n\, p_n)\, n}{\theta(p_n)}\right)$$

$$=0\left(\frac{\lambda_n\cdot p_n}{\theta p_n}\right)$$

$$=0(1) \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty \text{ (3.2) से} \tag{5.6}$$

पुनः (4.3) के प्रयोग से

$$|I_2|=0\left[\int_{1/n}^{\delta} |F(\phi)|\ \frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\left\{p(1/\phi)\sin(\phi/2)^{-\alpha-3/2}(\cos\phi/2)^{-\beta-1/2}\, d\phi\right]\right.$$

$$+0\left[\int_{1/n}^{\delta} |F(\phi)|\, n^{\alpha-1/2}(\sin\phi/2)^{-\alpha-5/2}(\cos\phi/2)^{-\beta-3/2}\, d\phi\right]$$

$$=I_{2\cdot 1}+\int_{2\cdot 2} \text{ माना}$$

अब माना कि $\epsilon>0$ के लिए $\delta$ इस प्रकार चुना जा सकता है कि

$$|F_1(\phi)|\leqslant\epsilon\,\frac{\lambda_{(1/\phi)}\, p_{(1/\phi)}\, \phi^{2\alpha+1}}{\theta(p_{(1/\phi)})} \tag{5.7}$$

$0\leqslant\phi\leqslant\delta$ के लिए

अब

$$|I_{2\cdot 1}|=0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\right)\int_{1/n}^{\delta}|F(\phi)|\,p_{(1/\phi)}\,(\sin\phi/2)^{-\alpha-3/2}\,d\phi$$

$$=0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\right)\int_{1/n}^{\delta}\frac{|F(\phi)|\,p_{(1/\phi)}}{\phi^{\alpha+3/2}}$$

$$=0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\right)\left[\frac{|F_1(\phi\,|\,p(1/\phi)}{\phi^{\alpha+3/2}}\right]_{1/n}^{\delta}$$

$$+0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\right)\int_{1/n}^{\delta}|F_1(\phi)|\,d\left\{\frac{p_{(1/\phi)}}{\phi^{\alpha+3/2}}\right\}$$

$=I_{2\cdot 1\cdot 1}+I_{2\cdot 1\cdot 2}$ माना

$$|I_{2\cdot 1\cdot 1}|=0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\right)+0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\right)0\left(\frac{\lambda_n\,p_n\,n^{-2\alpha-1}}{\theta(p_n)}p_n\,.\,n^{\alpha+3/2}\right)$$

$$=0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\right)+0\left(\frac{\lambda_n\,p_n\,.\,n}{\theta(p_n)}\right)$$

$$=0\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\right)+0\left(\frac{\lambda_n\,p_n}{\theta(p_n)}\right)$$

$=\theta(1)+0(1)$ ज्यों ज्यों $n\to\infty$ (5.8)

अब

$$|I_{2\cdot 1\cdot 2}|\;M\epsilon\,\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\int_{1/n}^{\delta}\frac{\lambda_{(1/\phi)}\,p_{(1/\phi)}\,\phi^{2\alpha+1}}{p_{(1/\phi)}}\,d\left[\frac{p_{(1/\phi)}}{\phi^{\alpha+3/2}}\right]$$

$$M\epsilon\,\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\int_{1/\delta}^{n}\frac{\lambda_x\,p_x\,x^{-2\alpha-1}}{\theta(p_x)}\,d\{p_{(x)}\,x^{\alpha+3/2}\}$$

$$M\epsilon\,\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\int_{1/\delta}^{n}\frac{\lambda_x\,px_x^{-2\alpha-1}}{\theta(p_x)}\,x^{\alpha+3/2}\,d[p_x]$$

$$+\int_{1/\delta}^{n}\frac{\lambda_x\,p_x\,x^{-2\alpha-1}}{\theta(p_x)}\left\{p_{(x)}\,x^{(\alpha+3/2)}\,x^{\alpha+1/2}\,dx\right\}$$

$\leqslant M\epsilon\,\dfrac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\,[J+(\alpha+3/2\;k]$ माना

$$J\leqslant\sum_{a}^{n}\frac{p_k\,\lambda_k\,p_k}{\theta(p_k)\,k^{\alpha-1/2}}$$

जहाँ एक निश्चित धनात्मक पूर्णांक है। लेकिन $\{p_k\}$ ऐक अनृण तथा अवर्धमान अनुक्रम है। अतः

$$kp_k \leqslant p_k$$

$$\therefore \quad J = 0\left( \sum_a^n \frac{p_k \lambda_k}{\theta(p_k)} \frac{p_k}{k^{\alpha+3/2}} \right)$$

$$= 0 \sum_a^n \frac{p_k}{k^{\alpha+3/2}} \qquad (5.11)$$

तथा

$$k \leqslant \sum_{a-1}^{n-1} p_k \int_{k_1}^{k_1+1} \frac{\lambda_x \, p_x}{\theta(p_x) \, x^{\alpha+1/2}} \, dx$$

$$= 0 \sum_{a-1}^{n-1} \frac{p_k \lambda_k \, p_k}{\theta(p_k) \, k^{\alpha+3/2}}$$

$$= 0 \sum_{a-1}^{n-1} \frac{p_k}{k^{\alpha+3/2}} \qquad (5.10)$$

(5.9), (5.10) के उपयोग से सिद्ध हुआ कि

$$I_{2 \cdot 1 \cdot 2} = 0(1) \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty \qquad (5.11)$$

अब हम $I_{2 \cdot 2}$ पर विचार करेंगे।

$$|I_{2 \cdot 2}| = 0(n^{\alpha-1/2}) \int_{1/n}^{\delta} |F(\phi)| \, (\sin \phi/2)^{-\alpha-5/2} \, d\phi$$

$$\leqslant M \, \epsilon \, n^{\alpha-1/2} \int_{1/n}^{\delta} |F(\phi)| \, \phi^{-\alpha-5/2} \, d\phi$$

$$= n^{\alpha-1/2} \Big\{ M \left[ F_1(\phi) \, \phi^{-\alpha-5/2} \right]_{1/n}^{\delta} +$$

$$+ M \epsilon \int_{1/n}^{\delta} \frac{\lambda_{1/\phi} \, p_{(1/\phi)} \, \phi^{2\alpha+1}}{\theta(p_{1/\phi})} \, \phi^{-\alpha-5/2} \, d\phi$$

$$= I_{2 \cdot 2 \cdot 1} + I_{2 \cdot 2 \cdot 2} \text{ माना}$$

$$|I_{2 \cdot 2 \cdot 1}| = M(\delta) \, (n^{\alpha-1/2}) + M_1 (n^{\alpha-1/2}) \; 0\left( \frac{\lambda_n \, p_n \, n^{-2\alpha-1}}{\theta(p_n)} n^{\alpha+5/2} \right)$$

$$=0(n^{\alpha-1/2})+0\left(\frac{\lambda_n\, p_{n\cdot n}}{\theta(p_n)}\right)$$

$$=0(n^{\alpha-1/2})+0\left(\frac{\lambda_n\, p_n}{\theta(p_n)}\right)$$

$$=0(1)+0(1) \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty \tag{5.12}$$

क्योंकि $\alpha<1/2$

अब

$$|I_{2\cdot2\cdot2}| \leqslant M\,\epsilon\, n^{\alpha-1/2}\int_{1/n}^{\delta} \frac{\lambda_{1/\phi}\, p_{1/\phi}}{\theta(p_{1/\phi})}\phi^{\alpha-3/2}\, d\phi$$

$$\leqslant M\,\epsilon\, n^{\alpha-1/2}\int_{1/n}^{\delta} \frac{\lambda_x\, p_x}{\theta(p_x)}\, x^{\alpha-1/2}\, dx$$

$$\leqslant M\,\epsilon \text{ क्योंकि } \alpha<1/2$$

इसलिए $(I_{2\cdot2\cdot2})=0(1)$ ज्यों ज्यों $n\to\infty$ (5.13)

$$|I_3|=0\int_{\delta}^{\pi-1/n} \frac{|F(\phi)|\, p_{(1/\phi)}}{(\sin\phi/2)^{\alpha+3/2}\,(\cos\phi/2)^{\beta+1/2}}\,\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\, d\phi$$

$$+0\int_{\delta}^{\pi-1/n} \frac{|F(\phi)|\, n^{\alpha-1/2}}{(\sin\phi/2)^{\alpha+5/2}\,(\cos\phi/2)^{\beta+3/2}}\, d\phi$$

$$=0\,\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\int_{\delta}^{\pi-1/n} |F(\cos\phi)-A|\,(\cos\phi/2)^{\beta-1/2}\,(\cos\phi/2)\, d\phi$$

$$+0(n^{\alpha-1/2})\int_{\delta}^{\pi-1/n} |F(\cos\phi)-A|\,(\cos\phi/2)^{\beta-1/2}\, d\phi$$

$$=0\,\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}+0(n^{\alpha-1/2})$$

$$=0(1)+0(1) \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty \tag{5.14}$$

अन्त में

$$|I_4|=\left|\int_{\pi-1/n}^{\pi} F(\phi)\, N_n(\phi)\, d\phi\right|$$

$$=0(n^{\alpha+\beta+1})\int_{\pi-1/n}^{\pi} |F(\phi)|\, d\phi$$

$$=0(n^{\alpha+\beta+1})\int_{\pi-1/n}^{\pi}|f(\cos\phi)-A|\,(\cos\phi/2)^{2\beta+1}\,(\sin\phi/2)^{2\alpha+1}\,d\phi$$

$$=0(n^{\alpha-\beta+1})\int_0^{1/n}|F(-\cos\phi)-A|\,\phi^{2\beta+1}\,.\,d\phi$$

$$=0(n^{\alpha+\beta+1})\int_0^{1/n}|F(-\cos\phi)-A|\,\phi^{\beta-1/2}\,\phi^{\beta+3/2}\,d\phi$$

$$=0(n^{\alpha-1/2}\int_0^{1/n}\phi^{\beta-1/2}\,|f(-\cos\phi)-A|\,d\phi$$

$$=0(1) \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty \tag{6.15}$$

(5.6) से (5.14) तक का प्रयोग करने पर प्रमेय सिद्ध हुआ ।

## निर्देश

1. गुप्ता, डी० पी०, डी० एस० सी० थीसिस, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1970
2. जेगो, जी०, आर्थोगोनल पालीनामियल, अमेरिकन मेथेमेटिकल सोसाइटी कोलोनियम पब्लिकेशन, न्यूयार्क 1970
3. चौधरी, आर० एस०, पी० एच० डी० थीसिस, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1972

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 1, 1994

# कोशिकीय आनुवंशिकता तथा रोग की पहचान

**केशव कुमार**
एनाटमी विभाग, चिकित्सा विज्ञान संस्थान
काशी हिन्दू विश्व विद्यालय, वाराणसी

[ प्राप्त—जनवरी 1, 1992 ]

## सारांश

टर्नर्स की छँटाई के लिए आदर्शभूत आकृतियाँ जो कोशिकीय आनुवंशिकता के विश्लेषण की अपेक्षा रखती हैं, निम्नलिखित हैं—

1. बाह्य आकार के अनुसार मादा
2. अपारिवारिक छोटा कद
3. अपूर्ण विकसित गौण लैंगिक गुण
4. सामान्य अथवा असामान्य रूप से विकसित वाह्य प्रजनन अंग
5. मासिक धर्म का प्राथमिक अभाव ।

कायचिकित्सा विभाग से सन्दर्भित ऐसे 52 रोगियों को लिंग (sex) क्रोमेटिन के निरीक्षण हेतु मुख गुहा की श्लेष्मा झिल्ली से तथा क्रोमोसोमों के निरीक्षण के लिये परिधीय रक्त से विश्लेषित किया गया । 23 प्रतिशत रोगियों में क्रोमोसोम की असामान्यतायें पायी गयीं जिनमें से आधे टर्नर्स तथा आधे मोजेइक थे ।

## Abstract

**Cytogenetics and clinical diagnosis.** *By* Keshaw Kumar, Department of Anatomy, Institute of Medical Sciences, Banaras Hindu University, Varanasi.

The typical features requiring cytogenetic analysis to screen out Turners are following :—

1. Female phenotype.
2. Not familial short stature.
3. Poorly developed secondary sexual characters.
4. Normal/Abnormal development of external genitalia.
5. Primary amenorrhoea.

52 such patients referred from Medicine Department were analysed to investigate for sex-chromatin from buccal smear and chromosomal analysis from peripheral blood. Chromosomal anomalies were found in 23% of patients, half of them were Turners and half mosaics.

वाह्य आकार के अनुसार टर्नर्स वे मादा हैं जिनमें एक सेक्स क्रोमोसोम की कमी (45X0) होती है। इसके अपवाद चिकित्सा साहित्य में पाये गये हैं (रेग्रीस इत्यादि 1966, मुआशर इत्यादि 1981)। अन्य अध्ययन के अलावा यह आवश्यक हो गया है कि ऐसे रोगियों को कोशिकीय आनुवंशिकता के विश्लेषण के लिए छँटाई की जाय जिनका टर्नर्स होने के लिये सन्देह है अथवा जिनमें अपूर्ण विकसित माध्यमिक लैंगिक गुणों, मासिक धर्म का प्राथमिक अभाव, वाधित वृद्धि इत्यादि के कारण टर्नर्स होने का कलंक लगा हुआ है। टर्नर्स होने के कलंक से जुड़े रोगी हमेशा टर्नर्स होकर बाहर परिभ्रमण नहीं करते हैं यद्यपि इन रोगियों में छिपी हुई विविधता (mosaicism) को पूरी तरह वर्जित नहीं किया जा सकता है। इस प्रकार के रोगी सामान्य उपचार के प्रति उत्तरित अथवा अनुत्तरित रह सकते हैं। विशुद्ध हार्मोनल असमानता तथा क्रोमोसोमल विपथन, जो इस प्रकार की विसंगतियाँ उत्पन्न करते हैं, के बीच अनिश्चतता का विश्लेषण करने के क्रम में वर्तमान अध्ययन रोगियों के उन चुने हुए समूहों में संचालित किया गया जिन्हें मुख्य रूप से मासिक धर्म के प्राथमिक अभाव को शिकायत के साथ सन्दर्भित किया गया था। इस अध्ययन का उद्देश्य टर्नर्स की छँटाई करना था ताकि क्रोमोसोमों की दृष्टि से सामान्य रोगियों के लिये चिकित्सकीय उपाय स्वीकार किये जा सकें।

## प्रयोगात्मक

कायचिकित्सा विभाग से सन्दर्भित रोगियों का चयन सारणी-1 में दर्शाये गये गुणों पर निर्भर था—

1. अपारिवारिक छोटा कद
2. माध्यमिक लैंगिक गुणों का अपूर्ण विकास
3. मासिक धर्म का प्राथमिक अभाव
4. सामान्य अथवा असामान्य वाह्य प्रजनन अंग।

अध्ययन को 52 रोगियों में मुख गुहा की श्लेष्मा झिल्ली तथा परिधीय रक्त का उपयोग करते हुए संचालित किया गया। इन सभी अप्रकाशित रोगियों में सम्पूर्ण रक्त संवर्धन की साधारण विधि बिना

सीरम परिशिष्ट के विचारित तथा उपयोग की गई। क्रोमोसोमल संरचना में विसंगतियाँ खोज निकालने के लिये संशोधित "जी" बैंडिग प्रविधि[8] काम में लायी गयी।

## परिणाम तथा विवेचना

सारणी-1 लिंग क्रोमोसोम में क्रोमोसोमल विसंगतियों के लिये सन्देहास्पद संदर्भित रोगियों की चिकित्सकीय आवृतियाँ दर्शाती है। ऐसे 52 रोगियों में से (सारणी-2) 18 रोगियों ने एक्स क्रोमेटिन कोशिकाओं का 8-10% संयोग प्रदर्शित किया। इन 18 रोगियों में से 12 रोगी सामान्य क्रोमोसोमल आभार (46XX) रखते थे जिसे बैंडिग प्रविधि से सुनिश्चित किया गया था और 6 रोगी मोजेइक (46XX/45X0) पाये गये थे। 6 एक्स क्रोमेटिन ऋणात्मक रोगियों ने (45X0) क्रोमोसोमल आभार को प्रदर्शित किया तथा टर्नर्स के रूप में स्थापित किये गये। इन रोगियों में से लगभग 23% में क्रोमोसोमल विसंगतियाँ थीं जिनमें से आधे टर्नर्स थे तथा आधे मोजेइक थे। इन रोगियों में से अधिकतर में बाह्य प्रजनन अंग सामान्य रूप से विकसित थे, केवल कुछ में से बाह्य प्रजनन अंग बच्चों की तरह थे। भगोष्ठों में अण्डाशय अथवा वृषण नहीं थे तथा गर्भाशय एक ग्रन्थिका की तरह बीच में था।

प्रस्तुत अध्ययन से मिलता-जुलता अध्ययन वामेजाई तथा सिह[9] द्वारा 26 रोगियों में किया गया जिनमें से 6 रोगियों ने एक्स क्रोमेटिन कोशिकाओं का 4-5% संयोग प्रदर्शित किया था तथा केवल 16% रोगियों में क्रोमोसोमल विसंगतियाँ पायी गयी थीं जिनमें से आधे टर्नर्स थे तथा आधे मोजेइक थे। हद्दास तथा विल्किन्स[4] के अनुसार टर्नर्स सिंड्रोम के रोगी वाह्य आकार के अनुसार मादा दिखने वाले, छोटे कद वाले, बच्चों की तरह के वाह्य प्रजनन अंग वाले, मोटी गर्दन वाले, वृषण अथवा अण्डाशय के अपूर्ण विकास वाले होते हैं। ईगेन[5] ने बतलाया था कि ये रोगी नपुंसक होते हैं तथा इनमें मासिक धर्म का प्राथमिक अभाव होता है।

क्रोमोसोम विश्लेषण तथा लिंग क्रोमेटिन परीक्षण परस्पर आधारित होते हैं और इनका सम्मिलित प्रयोग जटिल रोगियों में रोग की न केवल सही पहचान कराता है अपितु एक्स-क्रोमोसोम की बाह्य आकृति एवं कार्य सम्बन्धी अवस्था का भी ज्ञान कराता है क्योंकि यह एक्स क्रोमेटिन के अस्तित्व का आधार है (मिलर[6])। प्रस्तुत अध्ययन से यह पता चलता है कि एक्स क्रोमेटिन तथा क्रोमोसोम के अध्ययन के द्वारा रोग की पहचान उन रोगियों के निस्सारण में महत्वपूर्ण है जो टर्नर्स के रूप में महत्वपूर्ण हैं जो टर्नर्स के रूप में स्थापित हो चुके हैं तथा जिनके बाह्य प्रजनन अंग बच्चों की तरह के हैं। यह भी माना गया है कि रोगी को अनावश्यक लेपाराटमी शल्य चिकित्सा से बचाया जा सकता है यदि रोगियों को क्रोमोसोमल विश्लेषण के लिये स्क्रीन किया जाय। यद्यपि लिंग-निर्धारण अथवा अण्डाशय या वृषण के ऊतकीय प्रमाण से सच्ची असामान्यता खोज निकालने के लिए अनुसंधानात्मक लेपाराटमी की जा सकती है परन्तु फिर भी गर्भ धारण के समय विशुद्ध हार्मोनल असन्तुलन तथा क्रोमोसोमल विपथन के बीच द्विधा को जो इस प्रकार की असामान्यताओं को उत्पन्न करती है, सुनिश्चित किया जा सकता है।[9]

प्रस्तुत अध्ययन के दौरान सामान्य मोजेइक तथा टर्नर कैरियोटाइप रोगियों के बीच कोई स्पष्ट फीनोटिक अन्तर नहीं मिला जो बामेजाई तथा सिंह[9] द्वारा प्राप्त परिणामों से मेल खाता है। जबकि जेन्जेल तथा सोलिश[7] के अनुसार 45X0 कोशिकीय पंक्ति सम्मिलित करने वाली लिंग क्रोमोसोम विविधता की महिलाओं तथा एकनिष्ठ 45X0 कोशिकीय पंक्ति वाली महिलाओं के चिकित्सकीय लक्षणों में अधिकतर भिन्नता थी तथा शारीरिक दोष अनुपस्थित हो सकते थे या बहुत कम अथवा आदर्श टर्नर फीनोटाइप से विभेदनीय नहीं हो सकते थे।

प्रस्तुत कोशिकीय आनुवंशिक अध्ययन में क्रोमोसोमल असामान्यताओं की आवृत्ति 23 प्रतिशत पायी गयी जो वर्मा तथा डोसिक[8] द्वारा प्राप्त 25 प्रतिशत क्रोमोसोमल असामान्यता की आवृत्ति के आस-पास है। सन्देहास्पद टर्नर्स के मामलों में चिकित्सकीय दृष्टि से चयनित रोगियों के वर्ग में अधिक अच्छे पूर्वानुमान के लिये कोशिकीय आनुवंशिकता के मूल्यांकन के महत्व को अनदेखा नहीं किया जा सकता है।[9]

**सारणी 1**

क्रोमोसोम से सम्बन्धित विश्लेषण के लिए चिकित्सकीय-कसौटी

1. अपारिवारिक छोटा कद।
2. अपूर्ण विकसित माध्यमिक लैंगिक गुण।
3. मासिक धर्म का प्राथमिक अभाव।
4. सामान्य अथवा असामान्य विकसित बाह्य प्रजनन अंग।

**सारणी 2**

**एक्स क्रोमेटिन तथा क्रोमोसोम से सम्बन्धित अध्ययन**

| रोगियों की संख्या | मुखगुहा का अवलेप (बक्कल स्मियर) | | | क्रोमोसोम | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | धनात्मक >23% | नीचा <15% | ऋणात्मक <10% | सामान्य 46XX | मोसाइक (mosaic) 46XX/45X0 | टर्नर (turner) 45X0 |
| 28 | धनात्मक | | | 46XX | | |
| 12 | | नीचा | | 46XX | | |
| 6 | | नीचा 9-10% | | | 46XX/45X0 | |
| 6 | | | ऋणात्मक | | | 45X0 |

## निर्देश

1. रेयीस, एफ० आई०, कोह, के० एस० तथा फाइमैन, सी० 'आब्स्टेट्रिक्स एण्ड गायनेकोलोजी,' 1976, **126**, 668-670.

2. मुआशर, एस०, बारामकि, टी० ए० तथा डिग्स, ई० एस० 'आब्स्टेट्रिक्स एण्ड गायनेकोलोजी,' 1981, **56**, 752-756.

3. सीब्राइट, एम० ए० 'द लैन्सेट,' 1971, **2** , 971-972.

4. हद्दास, एच० एम० तथा विल्किन्स, एल०, 'पीडियाट्रिक्स,' 1959, **23** , 885-902.

5. ईगेन, आर० आर० 'अमेरिकन जनरल आफ क्लिनिकल पैथोलोजी,' 1973, **39** , 3-37.

6. मिलर, ओ० जे० अमेरिकन जनरल आफ 'आब्स्टेट्रिक्स एण्ड गायनेकोलोजी' 1964, **90**, 1078-1131.

7. जेन्जेल, सी० तथा सोलिश, जी०आई० 'आब्स्टेट्रिक्स एण्ड गायनेकोलोजी,' 1979, **134**, 599-600

8. वर्मा, आर० एस० तथा डोसिक, एच० 'ए रिपोर्ट आफ 357 केसेज क्लिनिकिल जेनेटिक्स,' 1980, **17** , 303-308.

9. बामेजाई, आर० तथा सिंह, एस० 'जनरल आफ एनाटामिकल साइंसेज,' 1982, **3(1)**, 9-12.

Vijana Parishad Anusandhan patrika, Vol. 37, No. 1, 1994

# I-फलन एवं वेबेर स्चाफहिटिलिन प्रकार युक्त समाकलन

अशोक कुमार रोंघे

गणित विभाग, जैन हा० से० स्कूल, विदिशा (म० प्र०)

[ प्राप्त—सितम्बर 27, 1993 ]

## सारांश

प्रस्तुत शोध प्रपत्र में $I$-फलन एवं वेबेर स्चाफहिटिलिन प्रकार युक्त समाकलनों का मूल्यांकन किया गया है। कुछ रोचक नये परिणामो को उनकी विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किया गया है।

## Abstract

**Some Weber-Schafheitlin type integrals involving I-function,** *By* Ashok Kumar Ronghe, Department of Mathematics, Jain H. S. School, Vidisha (M. P.)

In this research paper, we evaluate four Weber-Schafheitlin type of integrals involving I-function. Few interesting new results have been deduced as particular cases.

## 1. प्रस्तावना

सक्सेना[3] का सार्वीकृत $H$-फलन जो कि $I$-फलन द्वारा जाना जाता है, जिसके गुणधर्मों का अध्ययन वैद्य, जैन तथा वर्मा[4] तथा गुणात्मक विश्लेषण शर्मा तथा अहमद[5] के शोध पत्रों में किया गया है, उस $I$-फलन को हम निम्न प्रकार से व्यक्त कर रहे हैं—

$$I_R = I^{m,\, l}_{p_i,\, q_i,\, R}\left[Z \,\middle|\, \begin{matrix} P_1, P_2 \\ Q_1, Q_2 \end{matrix}\right],$$

या

$$= I^{m,\, l}_{p_i,\, q_i;\, R}\left[Z \,\middle|\, \begin{matrix} [(a_j, \alpha_j)_{1,\, l}], [(a_{ji}, \alpha_{ji})_{l+1},\, p_i] \\ [(b_j, \beta_j)_{1,\, m}], [(b_{ji}, \beta_{ji})_{m+1},\, q_i] \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi\omega}\int_L \theta(s)\, Z^s \,.\, ds \tag{1.1}$$

जहाँ $\omega=\sqrt{(-1)}$ और

$$\theta(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{l}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\sum_{i=1}^{R}\left[\prod_{j=m+1}^{q_i}\Gamma(1-b_{ji}+\beta_{ji}s)\prod_{j=l+1}^{p_i}\Gamma(a_{ji}-\alpha_{ji}s)\right]},$$

समाकलन (1.1) पूर्ण अभिसारी है जब $(B>0,\ A\leqslant 0)$ जहाँ,

$$B=\sum_{j=1}^{l}\alpha_j-\sum_{j=m+1}^{p_i}\alpha_{ji}+\prod_{j=1}^{m}\beta_j-\sum_{j=m+1}^{q_i}\beta_{ji}, \tag{1.2}$$

$$A=\sum_{j=1}^{p_i}\alpha_{ji}-\sum_{j=1}^{q_i}\beta_{ji}, \tag{1.3}$$

$$|\arg z|<\frac{1}{2}B\pi,\ \forall\ i\in\{1,2,\ldots,R\} \tag{1.4}$$

सर्वत्र प्रपत्र में $P_1, P_2, Q_1\ldots$ इत्यादि प्राचलों के समुच्चयों को दर्शाता है।

**2.** मुख्य समाकलनों का मूल्यांकन करते समय हमें निम्न परिणामों की आवश्यकता पड़ेगी, [6. P. 299, समी० (13.4.2) एवं 13.4.3)],

$$\int_0^\infty x^{-\lambda} J_\mu(ax)\, J_\gamma(bx)\,.\,dx$$

$$=\frac{(b/a)^\gamma (a/2)^{\lambda-1}\,\Gamma[(\mu+\gamma-\lambda+1)/2}{2\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma[(\mu-\gamma+1)/2}\,.\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}(\gamma\pm\mu-\lambda+1)/2;\\(\gamma+1)\end{matrix}\ \left(\frac{b}{a}\right)^2\right], \tag{2.1}$$

बशर्ते $Re(\mu+\gamma-\lambda+1)>0,\ Re(\lambda)>-1,\ 0<b<a,$

$$\int_0^\infty x^{-\lambda} J_\mu(ax)\, J_\gamma(bx)\,.\,dx$$

$$=\frac{(a/b)^\mu (b/2)^{\lambda-1}\,\Gamma[(\mu+\gamma-\lambda+1)/2]}{2\Gamma(\mu+1)\,\Gamma[(\gamma-\mu+\lambda+1)/2]}\,.\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}(\mu\pm\gamma-\lambda+1)/1\\(\mu+1)\end{matrix}\ ;\left(\frac{a}{b}\right)^2\right], \tag{2.2}$$

बशर्ते $Re(\mu+\gamma-\lambda+1)>0,\ Re(\lambda)>-1,\ 0<a<b,$

## 3. मुख्य समाकलन

इस प्रपत्र में निम्नलिखित समाकलनों का मूल्यांकन किया गया है, यहाँ प्रत्येक समाकलन (1.2), (1.3) एवं (1.4) के अन्तर्गत वैध है।

**प्रथम समाकलन**

$$\int_0^\infty x^{-\lambda} J_\mu (ax) J_\gamma (bx) \,.\, I_R [zx^\sigma] \,.\, dx$$

$$= \frac{a^{\lambda-1}}{2^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{2n+\gamma} [n!\, \Gamma(\gamma+n+1)]^{-1} \times$$

$$I^{m,\, l+2}_{p_i+3,\, q_i+1 : R} \left[ z(2/a)^\sigma \left| \begin{matrix} [(\pm\mu-\gamma-2n+\lambda)/2 : \sigma/2],\, P_1,\, P_2 \\ [(\mu-\gamma+\lambda)/2 : \sigma/2],\, Q_1,\, Q_2,\, [(1+\mu-\gamma+\lambda)/2 : \sigma/2] \end{matrix} \right. \right] \tag{3.1}$$

बशर्ते $Re(\lambda) > -1,\ 0 < b < d,\ Re(1+\mu+\gamma-\lambda+\sigma(b_j/\beta_j)) > 0,$

**द्वितीय समाकलन**

$$\int_0^\infty x^{\lambda} J_\mu (dx) J_\gamma (bx) \,.\, I_R [z\, x^{-\sigma}]\, dx$$

$$= \frac{a^{\lambda-1}}{2^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{2n+\gamma} .\, [n!\, \Gamma(\gamma+n+1)]^{-1} \times$$

$$I^{m+2,\, l}_{p_i+1,\, q_i+3 : R} \left[ z\,(a/2)^\sigma \left| \begin{matrix} P_1,\, P_2,\, [(1\pm\mu+\gamma+2n+\lambda)/2 : \sigma/2] \\ [(1-\mu+\gamma-\lambda)/2 : \sigma/2]\, Q_1, Q_2,\, [(-\mu+\gamma-\lambda)/2 : \sigma/2] \end{matrix} \right. \right]$$

बशर्ते $Re(\lambda) > -1,\ 0 < b < d,\ Re(1+\mu+\gamma-\lambda-\sigma(b_j/\beta_j)) > 0,$ (3.2)

**तृतीय समाकलन**

$$\int_0^\infty x^{-\lambda} J_\mu(dx) J_\gamma(bx) \,.\, I_R[z\, x^\sigma]\, dx$$

$$= \frac{b^{\lambda-1}}{2^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+\gamma} .\, [(n!\, \Gamma(\mu+n+1)]^{-1} \times$$

$$I^{m,\, l+2}_{p_i+3,\, q_i+1 : R} \left[ z(2/b)^\sigma \left| \begin{matrix} [(-\mu\pm\gamma-2n+\lambda)/2 : \sigma/2],\, P_1,\, P_2 \\ [(-\mu+\gamma+\lambda)/2],\, Q_1,\, Q_2,\, [(1+\mu-\gamma+\lambda)/2 : \sigma/2)] \end{matrix} \right. \right]$$

बशर्ते $Re(\lambda) > -1,\ 0 < a < b,\ Re(1+\mu+\gamma-\lambda+\sigma(b_j/\beta_j)) > 0,$ (3.3)

**चतुर्थ समाकलन**

$$\int_0^{\infty} x^{-\lambda} J_\mu(dx) J_\gamma(bx) \,.\, I_R [z x^{-\sigma}] \, dx.$$

$$= \frac{b^{\lambda-1}}{2^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^{2n+\gamma} \,.\, [n!\, \Gamma(\mu+n+1)]^{-1} \times$$

$$I^{m+2,\, l}_{p_i+1,\, q_i+3 \,:\, R} \left[ z(b/2)^\sigma \middle| \begin{matrix} P_1, P_2\, (1\pm\mu+\gamma+2n+\lambda)/2 : \sigma/2], \\ [(\mu-\gamma+\lambda)/2 : \sigma/2], Q_1, Q_2\, [(+\mu-\gamma-\lambda)/2 : \sigma/2] \end{matrix} \right]$$

बशर्ते $Re(\lambda) > -1,\ 0 < a < b,\ Re[1+\mu+\gamma-\sigma(b_j/\beta_j)] > 0,$ (3.4)

**उपपत्ति :** (3.1) की स्थापना के लिए इसके वाम पक्ष के समाकलन में आये $I$-फलन को (1.1) के बल पर मेलिन-बार्निज प्रकार के समाकलन के रूप में एवं समाकलन का क्रम बदल कर व्यक्त करते हैं जो कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है और पूर्ण अभिसारी है। यह इस प्रकार है—

$$\frac{1}{2\pi\omega} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j-\beta_j s) \prod_{j=1}^{l} \Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\sum_{i=1}^{R} \left[ \prod_{j=m+1}^{q_i} \Gamma(1-b_{ji}+\beta_{ji} s) \prod_{j=l+1}^{p_i} (\Gamma a_{ji} - \alpha_{ji} s) \right.}$$

$$\times \int_0^{\infty} x^{-\lambda+\sigma s} J_\mu(ax) J_\gamma(bx) \, dx \, ds,$$

अब (2.1) की सहायता द्वारा आन्तरिक समाकलन का मान गामा फलनों एवं हाइपरज्यामितीय फलन के रूप में लिख कर पुनः ${}_2F_1 [\ ; A]$ को श्रेणी के रूप में व्यक्त कर परिणाम की विवेचना (1.1) से करने पर (3.1) का दाहिना पक्ष प्राप्त होता है। इसी प्रकार समाकलन (3.2) को सिद्ध कर सकते हैं जहाँ $A=(a/b)^2$ या $(b/a)^2$ को प्रदर्शित करता है।

पुनः इसी प्रकार परिणाम (3.3) एवं (3.4) को प्राप्त किया जा सकता है किन्तु (2.1) के स्थान पर परिणाम (2.2) का उपयोग करेंगे।

## 4. विशिष्ट दशायें

इस अनुभाग में केवल परिणाम (3.1) की विशिष्ट दशाएँ ज्ञात करेंगे।

(i) यदि (3.1) में $R=1$, रखें तो $I$-फलन युक्त परिणाम फाक्स $H$-फलन के रूप में प्राप्त होगा—

$$\int_0^\infty x^{-\lambda} J_\mu(ax)\, J_\gamma(bx)\, I_1\,[z\, x^\sigma]\, dx,$$

$$=\frac{a^{\lambda-1}}{2^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{2n+\gamma} \quad [n\,!\,\Gamma(\gamma+n+1]^{-1}\times$$

$$H^{m,\, l+2}_{p_i+3,\, q_1+1}\left[\, z(2/b)^6 \,\middle|\, \begin{matrix} [(\pm\mu-\gamma-2n+\lambda)/2 : \sigma/2] : P_1 \\ [(\mu-\gamma+\lambda)/2 : Q_1\, [1+\mu-\gamma+\lambda)/2 : \sigma/2 \end{matrix}\right]$$

बशर्ते $Re(\lambda)>1,\ 0<b<a,\ Re[(1+\mu+\gamma-\lambda+\sigma(b_j/\beta_j)]>0$ (4.1)

(ii) यदि (3.1) में $R=1,\ a_i=\alpha_{il}=\beta_j=\beta_{il}=c,\ (i=1, \ldots p_i; j=1, \ldots q_i)$ तो परिणाम $G$-फलन में प्राप्त होगा।

इसी प्रकार $I$-फलन युक्त परिणामों को $E$, $F$-फलनों में थोड़े से सरलीकरण से प्राप्त कर सकते हैं।

## निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transcendental functions भाग 1, मेकग्राहिल न्यूयार्क,

2. फाक्स, सी० , 'ट्रांजे० अमे० मैथ० सोसा०' 1961, 98(3), 395-429

3. सक्सेना, वी० पी०, Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1982, 52, 366-375

4. वैद्य, जैन तथा वर्मा, Proc. Acad. Sci. India 1989, 53 A II, 327-337

5. शर्मा, तथा अहमद, (प्रकाशाधीन)

6. मगनूस, डब्लू०, ओबेरहेटिंगर एफ० तथा सोनी, आर० पी०, Spri. Ver. Ber. Hei. New-York

Vijanana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 1, 1994

# उष्मा संचालन में चेबीशेव-हर्माइट बहुपदों तथा फाक्स के H-फलन के सम्प्रयोग

एस० डी० बाजपेयी

गणित विभाग, बहरैन विश्वविद्यालय, ईसाटाउन, बहरैन

[ प्राप्त—अक्टूबर 16, 1992 ]

## सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र को उद्देश्य उष्मा संचालन की समस्याओं से सम्बद्ध आंशिक अवकल समीकरण का सूत्रीकरण करना है जिनके हलों से हर्माइट बहुपद प्राप्त होते हैं। हम फाक्स के $H$-फलन वाले प्रमेय के दो विशिष्ट हल भी प्राप्त करेंगे।

## Abstract

**Applications of Chebyshev thermite polynomials and Fox's H-function in heat conduction.** *By* S. D. Bajpai, Department of Mathematics, University of Bahrain, P. O. Box 32038, Isa Town, Bahrain.

In this paper, we formulate a partial differential equation related to the problems of heat conduction, the solutions of which lead to Hermite polynomials. We also obtain two particular solutions of the problem involving Fox's $H$-function.

## 1. प्रस्तावना

प्रस्तुत प्रपत्र के उद्देश्य उष्मा संचालन की समस्याओं से सम्बद्ध आंशिक अवकल समीकरण का सूत्रीकरना तथा इसके श्रेणी हल प्राप्त करने है जिनमें हर्माइट बहुपद निहित हो। साथ ही हम तीन विमीय आंशिक अवकल समीकरण तथा इसके हल प्रस्तुत करेंगे जो हमारे एक विमीय परिणामों से सीधे निकलते हैं। हम एक विमीय आंशिक अवकल समीकरण के दो विशेष हल प्राप्त करने के लिए फाक्स के $H$-फलन[4] वाले दो समाकलों को व्यवहृत करेंगे।

उदाहरण के रूप में हम अपने दो विशिष्ट हलों के केवल चार विशिष्ट हल प्रस्तुत करेंगे।

आगे संक्षेपण की दृष्टि से $(a_p, e_p)$ द्वारा प्राचलों का सेट $(a_1, e_1), \ldots, (a_p, e_p)$ प्रदर्शित होता है।

समाकल के निम्नलिखित रूपों [2, p. 2, (2.1)] की आवश्यकता उपपत्तियों में होगी—

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2r}\, e^{-x^2/2}\, He_{2n}(x)\, H_{p,q}^{u,v}\left[ zx^{2h} \middle| \begin{matrix} (a_p, e_p) \\ (b_q, f_q) \end{matrix} \right] dx$$

$$= 2^{r+n+1/2}\; H_{p+2,\, q+1}^{u,\, v+2}\left[ {}_2h_z \middle| \begin{matrix} (1/2-r, h)\, (-r, h), (a_p, e_p) \\ (b_q, f_q), (n-r, h) \end{matrix} \right], \tag{1.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2r+1}\, e^{-x^2/2}\, He_{2n+1}(x)\, H_{p,\, q}^{u,\, v}\left[ zx^{2h} \middle| \begin{matrix} (a_p, e_p) \\ (b_q, f_q) \end{matrix} \right] dx$$

$$= 2^{r+n+3/2}\, H_{p+2,\, q+1}^{u,\, v+2}\left[ {}_2h_z \middle| \begin{matrix} (-1/2-r, h), (-r, h), (a_p, e_p) \\ (b_q, f_q), (n-r, h) \end{matrix} \right], \tag{1.2}$$

जहाँ

$$h>0, \sum_{j=1}^{p} e_j - \sum_{j=1}^{q} f_j \equiv A \leqslant 0, \sum_{j=1}^{v} e_j - \sum_{j=v+1}^{p} e_j + \sum_{j=1}^{u} f_j - \sum_{j=u+1}^{q} f_j$$

$$\equiv B, |\arg z| < 1/2\, B\pi, r \geqslant n, r=0, 1, 2, \ldots, n=0, 1, 2, \ldots .$$

## 2. आंशिक अवकल समीकरण का सूत्रीकरण

हम निम्नलिखित पर विचार करेंगे

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{k}{2}(x^2/2-1)\, u, \; (-\infty < x < \infty) \tag{2.1}$$

जहाँ $u(x, t)$ शून्य की ओर अग्रसर होता है यदि $t$ का मान अधिक हो तथा जब $|x| \to \infty$, तथा $u(x, o) \equiv u(x)$.

समीकरण (2.1) उष्मा संचालन की समस्या से सम्बद्ध है [3, p. 134, (4)]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu, \tag{2.2}$$

अनन्त क्षेत्र में $(-\infty < x < \infty)$, बशर्ते कि $h = k/2\, (x^2/2-1)$.

समीकरण (2.1) उष्मा संचालन की अन्य समस्याओं [3, p. 29, (1)], [3, p. 33, (24)] से भी सम्बन्धित है।

## 3. आंशिक अवकल समीकरण का हल

(2·1) का जो हल प्राप्त किया जाना है वह है

$$u(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n\, e^{-knt-x^2/4}\, He_n(x), \tag{3.1}$$

जहाँ $He_n(x)$ चेबीशेव-हर्माइट बहुपद हैं ।

**उपपत्ति** : माना कि (2.1) के हल का स्वरूप निम्नवत् है

$$u(x, t)=e^{-knt-x^2/4}\, X(x),\ n=0, 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

(2.1) में (3.2) के प्रतिस्थापन से अवकल समीकरण

$$X''(x)-xX'(x)+nX(x)=0, \tag{3.3}$$

प्राप्त होता है जो चेबीशेव-हर्माइट समीकरण [5, p. 168, (6.27)] है जिसका हल $X(x)=He_n(x)$.

अत:

$$u(x, t)=e^{-kt-x^2/4}\, He_n(x) \tag{3.4}$$

अध्यारोपण के सिद्धान्त का प्रयोग करने पर (2.1) का हल (3.1) में समानीत हो जाता है। (3.1) में $t=0$ रखने पर

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n\, e^{-x^2/4}\, He_n(x) \tag{3.5}$$

(3.5) के दोनों पक्षों में $e^{-x^2/4}\, He_m(x)$ से गुणा करने पर तथा $\infty$ से $\infty$ तक $x$ के प्रति समाकलित करने एवं चेबीशेव-हर्माइट बहुपदों [5, p. 168, (6.28)] के लाम्बिकता गुण का प्रयोग करने पर

$$A_n=\frac{1}{n!\,\sqrt{(2\pi)}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, e^{-x^2/4}\, He_n(x) \tag{3.6}$$

**वैकल्पिक हल**

उपर्युक्त की ही तरह बढ़ते हुए (2.1) का वैकल्पिक हल

$$u(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty} B_n\, e^{-knt-x^2/4}\, H_n(x/\sqrt{2}) \tag{3.7}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ $H_n(x)$ हर्माइट बहुपद हैं तथा

$$B_n=\frac{1}{n!\,2^n\sqrt{(2\pi)}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, e^{-x^2/4}\, H_n(x/\sqrt{2}) \tag{3.8}$$

**4. त्रिविमीय आंशिक अवकल समीकरण**

(2.1) के समजात तीन विमीय आंशिक अवकल समीकरणों को

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\nabla^2\, u-\frac{k}{2}\left[(x^2+y^2+z^2)/2-3\right] u=0 \tag{4.1}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ

$$(-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty,\ -\infty<z<\infty),\ u(x;\, y,\, z,\, t)$$

शून्य की ओर अग्रसर होता है, जब $t$ का मान बड़ा हो तथा जब ($|x|\to\infty$ तथा/या $|y|\to\infty$ तथा/या $|z|\to\infty$) तथा $u(x, y, z, o)\equiv u(x, y, z)$.

(4.1) का हल (3.1) से सीधे निकलता है जो निम्नवत् है

$$u(x, y, z, t)=\sum_{n_3=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty} A_{n_1,\, n_2,\, n_3} \tag{4.1}$$

$$\times e^{-k(n_1+n_2+n_3)t-(x^2+y^2+z^2)/4}\, He_{n_1}(x)\, He_{n_2}(y)\, He_{n_3}(z)$$

जहाँ

$$A_{n_1,\, n_2,\, n_3}=\frac{(2\pi)^{-3/2}}{n_1!\, n_2!\, n_3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, z)\, e^{-(x^2+y^2+z^2)/4}$$

$$\times He_{n_1}(x)\, He_{n_2}(y)\, He_{n_3}(z)\, dz\, dy\, dx \tag{4.3}$$

**वैकल्पिक हल** : (4.1) का वैकल्पिक हल (3.7) से सरलता से मिल जाता है।

**5. फाक्स H-फलन के रूप में विशिष्ट दशायें**

हल (3.1) से निम्नलिखित दो हल मिलते हैं

$$u_1(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}\, e^{-knt-x^2/4}\, He_{2n}(x) \tag{5.1}$$

जहाँ

$$A_{2n}=\frac{1}{(2n)!\,\sqrt{(2\pi)}}\int_{-\infty}^{\infty} u_1(x)\, e^{-x^2/4}\, He_{2n}(x)\, dx \tag{5.2}$$

तथा

$$u_2(x, t)= \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1}\, e^{-2k(2n+1)\, t-x^2/4}\, He_{2n+1}(x) \qquad (5.3)$$

जहाँ

$$A_{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)!\, \sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\infty} u_2(x)\, e^{-x^2/4}\, He_{2n+1}(x)\, dx \qquad (5.2)$$

यदि हम (5.2) तथा (5.4) में क्रमश:

$$u_1(x)=x^{2r}\, e^{-x^2/4}\, H_{p,\, q}^{n,\, v}\left[zx^{2h}\left|\begin{matrix}(a_p,\, e_p)\\ (b_q,\, f_q)\end{matrix}\right.\right] \qquad (5.5)$$

तथा

$$u_2(x)=x^{2r+1}\, e^{-x^2/4}\, H_{p,\, q}^{n,\, v}\left[zx^{2h}\left|\begin{matrix}(a_p,\, e_p)\\ (b_q,\, f_q)\end{matrix}\right.\right] \qquad (5.6)$$

को प्रतिस्थापित करें और समाकल (1·1) तथा (1·2) को व्यवहृत करें तो (5·1) तथा (5.3) के संगत हलों को निम्नलिखित के द्वारा दिया जाता है

$$u_1(x, t)=\frac{2^r}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{r} \frac{2^n}{(2^n)!}\, e^{-2knt-x^2/4}$$

$$\times H_{p+2,\, q+1}^{u,\, v+2}\left[{}_1h_z\left|\begin{matrix}(1/2-r,\, h),\, (-r,\, h),\, (a_p,\, e_p)\\ (b_q,\, f_q),\, (n-r,\, h)\end{matrix}\right.\right] He_{2n}(x) \qquad (5.7)$$

जो (1.1) के प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

$$u_2(x, t)=\frac{2^{r+1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{r} \frac{2^n}{(2n+1)!}\, e^{-k(2n+1)\, t-x^2/4}$$

$$\times H_{p+2,\, q+1}^{n,\, v+2}\left[{}_2h_z\left|\begin{matrix}(-1/2-r,\, h),\, (-r,\, h),\, (a_p,\, e_p)\\ (bq,\, fq),\, (n-r,\, h)\end{matrix}\right.\right] He_{2n+1}(x) \qquad (5.8)$$

**6. विशिष्ट हल**

हम (5.7) तथा (5.8) में से प्रत्येक की दो विशेष दशायें प्रस्तुत करते हैं।

(5.5), (5·6), (5.7) तथा (5.8) में $u=q=1$, $u=p=0$, $b_1=0, f_1=1; h=1$ रखने तथा [6, p. 151, (5)] का उपयोग करने पर, अर्थात् $H_{0,\, 1}^{1,\, 0}\left[z\left|\begin{matrix}\overline{\quad\quad}\\ (0,\, 1)\end{matrix}\right.\right]=e^{-z}$ तथा [6, p. 151, (1)] हमें निम्नलिखित दो हल मिलते हैं—

$$u_1(x,\, t)=\frac{2^r}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{r}\frac{2^n}{(2n)!}\; e^{-2knt-x^2/4}\, He_{2n}(x) \tag{6.1}$$

$$\times\frac{\Gamma(1/2+r)\,\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+r-n)}\;{}_2F_1\left[\begin{matrix}1/2+r,\, 1+r;\, -z\\ 1+r-n\end{matrix}\right]$$

जहाँ

$$u_1(x)=x^{2r}\, e^{-zx^2-x^2/4}.$$

$$u_2(x,\, t)=\frac{2^{r+1}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{r}\frac{2^n}{(2n+1)!}\; e^{-k(2n+1)\,t-x^2/4}\, He_{2n+1}(x)$$

$$\times\frac{\Gamma(3/2+r)\,\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+r-n)}\;{}_2F_1\left[\begin{matrix}3/2+r,\, 1+r;\, -z\\ 1+r-n\end{matrix}\right], \tag{6.2}$$

जहाँ

$$u_2(x)=x^{2r+1}\, e^{-zx^2-x^2/4}.$$

(6.1) तथा (6.2), में $z=0$ रखने पर

$$u_1(x,\, t)=\frac{2r}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{r}\frac{2^n}{(2n)!}\,\frac{\Gamma(1/2+r)\,\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+r-n)}$$

$$\times e^{-2knt-x^2/4}\, He_{2n}(x), \tag{6.3}$$

जहाँ

$$u_1(x)={}^{2r}\, e^{-x^2/4}.$$

$$u_2(x,\, t)=\frac{2^{r+1}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{r}\frac{2^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{\Gamma(3/2+r)\,\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+r-n)}$$

$$\times e^{-k(2n+1)\,t-x^2/4}\, He_{2n+1}(x) \tag{6.4}$$

जहाँ

$$u_2(x)=x^{2r+1}\, e^{-x^2/4}.$$

## 7. फूरियेर-हर्माइट प्रसार

(5.7), (5.8), (6.1), (6.2), (6.3) तथा (6.4) में $t=0$ रखने पर निम्नलिखित फूरिये-हर्माइट विस्तार प्राप्त होते हैं :

$$x^{2r}\, H_{p,q}^{u,v}\left[zx^{2h}\left|\begin{matrix}(a_p,\, e_p)\\ (b_q,\, f_q)\end{matrix}\right.\right]=\frac{2^r}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{r}\frac{2^n}{(2n)!}$$

$$\times H_{p+2,\, q+1}^{u,v+2}\left[{}_2hz\left|\begin{matrix}(1/2-r,\, h),\, (-r,\, h),\, (a_p,\, e_p)\\ (b_q,\, f_q),\, (n-r,\, h)\end{matrix}\right.\right] He_{2n}(x), \tag{7.1}$$

जो (1.1) के प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

$$x^{2r+1} H_{p,q}^{u,v}\left[zx^{2h}\middle|\begin{matrix}(a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right] = \frac{2^{r+1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{r} \frac{2^n}{(2n+1)!}$$

$$\times H_{p+2,\ q+1}^{u,\ v+2}\left[{}_2h_z\middle|\begin{matrix}(-1/2-r, h), (-r, h), (a_p, e_p)\\(b_q, f_q), (n-r, h)\end{matrix}\right] He_{2n+1}(x) \quad (7.2)$$

जो (1.2) के प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

$$x^{2r}\, e^{-zx^2} = \frac{2^r}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{r} \frac{2^n\, \Gamma(1/2+r)\, \Gamma(1+r)}{(2n)!\, \Gamma(1+r-n)}$$

$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix}1/2+r,\ 1+r;\ -z\\1+r-n\end{matrix}\right] He_{2n}(x). \quad (7.3)$$

$$x^{2r+1}\, e^{-zx^2} = \frac{2^{r+1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{r} \frac{2^n}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(3/2+r)\, \Gamma(1+r)}{\Gamma(1+r-n)}$$

$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix}3/2+r,\ 1+r;\ -z\\1+r-n\end{matrix}\right] He_{2n+1}(x). \quad (7.4)$$

$$x^{2r} = \frac{2^r}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{r} \frac{2^n \Gamma(1/2+r)\, \Gamma(1+r)}{(2n)!\, \Gamma(1+r-n)} He_{2n}(x) \quad (7.5)$$

तथा

$$x^{2r+1} = \frac{2^{r+1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{r} \frac{2^n \Gamma(3/2+r) \Gamma(1+r)}{(2n+1)! \Gamma(1+r-n)} He_{2n+1}(x). \quad (7.6)$$

यदि हम सम्बन्ध $He_m(x) = 2^{-m/2} H_m(x/\sqrt{2})$ का प्रयोग करें और लीजेन्ड्र द्विगुणन सूत्र [1, p. 58, (2.24)] की सहायता से सरल करें तो (7.5) तथा (7.6) ज्ञात विस्तारों [1, p. 174, (14)] में समानीत हो जाते हैं।

## निर्देश

1. ऐन्ड्रूज, एल०एस०, Special functions for engineers and applied mathematicians मैकमिलन पब्लिशिंग कम्पनी, न्यूयार्क, 1985

2. बाजपेयी, एस० डी०, Math. Ed. (Siwan), 1969, 3(1), 1-4

3. कार्सला, एच० एस० तथा जीगर, जे०सी०. Conduction of heat in solids (द्वितीय संख्या) क्लैरेंडन प्रेस, आक्सफोर्ड, 1986

4. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **98**, 395-429

5. केंडाल, एम० तथा स्टूअर्ट, ए०, The advanced theory of statistics, भाग 1 (चतुर्थ संस्करण) चार्ल्स ग्रिफिन एण्ड कम्पनी लिमिटेड, लन्दन, 1977

6. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, The *H*-function with applications in statistics and other disciplines. विले ईस्टर्न लिमिटेड, नई दिल्ली 1978

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 1, 1994

# प्रबल बोरेल संकलनीयता विधि से लीजेण्ड्र श्रेणी का अध्ययन

श्याम लाल
गणित विभाग, हरिश्चन्द्र स्नातकोत्तर कालेज, वाराणसी
तथा
जी० पी० सिंह
गणित विभाग, केन्द्रीय विद्यालय, गया (बिहार)

[ प्राप्त—अगस्त 28, 1993 ]

## सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में अत्यन्त सामान्य दशा के अन्तर्गत लीजेन्ड्र श्रेणी की प्रबल बोरेल संकलनीयता का अध्ययन किया गया है।

## Abstract

**A study of Legendre series by strong Borel summability method.** *By* Shyam Lal, Department of Mathematics, Harish Chandra Post Graduate College, Varanasi and G. P. Singh, Department of Mathematics, Kendriya Vidyalaya No. II ASC (N), Military Campus, Gaya (Bihar).

Prasad[3] has established a theorem on ordinary Borel summability of Legendre Series. Here, in the present paper, our aim is to study the strong Borel Summability of Legendre series under very general condition. By Winn[4], it may be noticed that strong summability implies ordinary summability.

1. **परिभाषाएँ** : माना $\{s_n\}$ एक अनन्त श्रेणी $\Sigma a_n$ के आंशिक योगफलों का अनुक्रम है। हार्डी तथा लिटिलवुड[2] द्वारा की गई परिभाषा के अनुसार यदि

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} |s_n - s| = 0(e^r) \tag{1.1}$$

ज्यों ज्यों $r \to \infty$, तो अनुक्रम $\{s_n\}$ या श्रेणी $\Sigma a_n$ बोरेल विधि से प्रबलत: संकलनीय या स्थिर सान्त योगफल तक संकलनीय $|B|$ कहलाती है।

2. $(-1, 1)$ परास में लेबेस्ग समाकलनीय फलन $f(x)$ से सम्बद्ध लीजेन्ड्र श्रेणी को

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x) \tag{2.1}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(x)\, p_n(x)\, dx \tag{2.2}$$

तथा $p_n(x)$ सूचक है $n$वाँ लीजेन्ड्र बहुपद का जिसे जनक फलन

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2xz+z^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n(x) \text{ द्वारा दिया जाता है।} \tag{2.3}$$

हम लिखेंगे कि

$$\psi(f) = f(\cos\theta - t) = f(\cos\theta)$$

$$\tau = \left[\frac{1}{t}\right], \; 1/t \text{ का समाकल अंश}$$

## 3. ज्ञात परिणाम

प्रसाद[3] ने लीजेन्ड्र श्रेणी की बोरेल संकलनीयता पर निम्नलिखित प्रमेय की स्थापना की है।

**प्रमेय :** यदि

$$\int_0^t |f(x \pm u) - f(x)|\, du = 0\left[\frac{t}{\log\, 1/t}\right], \text{ ज्यों ज्यों } t \to 0 \tag{3.1}$$

तो लीजेन्ड्र श्रेणी (2-1) $f(x)$ के प्रति एक आन्तरिक बिन्दु $x$ पर अन्तराल $(-1, 1)$ में संकलनीय $(B)$ है।

## 4. मुख्य परिणाम

हमने उपर्युक्त परिणाम का सार्वीकरण अत्यन्त सामान्य प्रतिबन्ध के अन्तर्गत प्रबल बोरेल संकलनीयता के लिए किया है।

**प्रमेय :** माना $(p_n)$ अचरों का एक वास्तविक, अनृण, मोनोटोनिक अवर्धमान अनुक्रम है जिससे कि इसका $n$वाँ आंशिक योग

$$P_n = \sum_{v=0}^{\infty} pv \to \infty, \text{ ज्यों ज्यों } t \to 0$$

यदि

$$\int_0^t |f(x\pm u)-f(x)|\, du=0\left[\frac{\lambda(1/t)}{\mu(p_T)}\right] \text{ ज्यों ज्यों } t\to 0 \tag{4.1}$$

जहाँ $\lambda(t)$ तथा $\mu(t)$ $t$ के ऐसे दो धनात्मक फलन हैं कि

$$\lambda(t), \mu(t) \text{ तथा } \frac{t\,\lambda(t)}{\mu(t)}$$

$t$ के साथ मोनोटोनिक रूप से वृद्धि करते हैं तथा

$$\lambda(n^{\alpha}) \log n=0\,[\mu(p_n\alpha] \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty \tag{4.2}$$

यदि $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ तो लीजेन्ड्र श्रेणी (2.1) प्रबल या केवल संकलनीय $(B)$ है एक आन्तरिक बिन्दु पर $f(x)$ के प्रति $(-1, 1)$ अन्तराल में।

5. **प्रमेयिका** : हमारे प्रमेय के लिये निम्नलिखित प्रमेयिका की आवश्यकता होगी—

**प्रमेयिका** : $\{pn\}$ अनुक्रम पर जो प्रतिबन्ध लगाये गये हैं उनके अन्तर्गत, जब $pn\to\infty$ ज्यों ज्यों $n\to\infty$, तो हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होगा।

$$\int_0^t |f(\cos(\theta-y))-f(\cos\theta)|\; dy=0\left[\frac{\lambda(1/t)\; t}{\mu(p_T)}\right] \tag{5.1}$$

ज्यों ज्यों $t\to 0$, जहाँ $x=\cos\theta$, $bx+u=\cos\phi$ तथा $\theta-\phi=y$.

इस प्रमेयिका की उपपत्ति फोआ[1] का ही अनुगमन करने पर प्राप्त होगी।

## 6. मुख्य परिणाम की उपपत्ति

प्रसाद[8] के बहु प्रसिद्ध कम्प्यूटेशन का अनुगमन करते हुए हमें लीजेन्ड्र श्रेणी (6.1) का $n$वाँ आंशिक योगफल $s_n(x)$ विन्दु $x$ पर $(-1, 1)$ में प्राप्त होता जिसे

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{(\text{sia }\theta)}}\int_0^{1/r^{\alpha}}\left[f\{\cos(\theta-t)\}-f(\cos\theta)\right]$$

$$\frac{\sin(n+1)\,t}{\sin t/2}\sqrt{(\sin(\theta-t))}\,dt+0(1) \tag{6.1}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ

$$0<\frac{1}{r}\alpha\leqslant\sigma<1,\; x=\cos\theta,\; y=\cos\phi,\; 0<\theta<\pi,\; 0<\theta<\pi,\; 0<\phi<\pi;\; \theta-\phi=t$$

इत्यादि

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}|s_n(x)-f(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}\left|\int_0^{1/r^\alpha} \frac{\psi(t)}{\sin(t/2)} \frac{\sqrt{(\sin(\theta-t)}}{\pi\sqrt{(\sin\theta)}}\right.$$

$$\left.\sin(n+1)t\,dt\right| + 0\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\right)$$

$$=0(I_1)+0(I_2)+0(e^r), \text{ माना} \tag{6.2}$$

$$I_1=\int_0^{1/r} \frac{\psi(t)}{t}\left| e^{r\cos t}\sin(r\sin t+t)\right| dt$$

$$=0[(r+1)\ e^r]\ 0\left[\frac{\lambda(r)}{\mu(p_r)}\times\frac{1}{r}\right], \text{ (5.1) द्वारा}$$

$$=0(e^r)\ 0\left[\frac{\lambda(r)(r+1)}{\mu(p_r)}\right]$$

$$=0(e^r)\ 0\left[\frac{\lambda(r)}{\mu(p_r)}\right] \text{ ज्यों ज्यों } r\to\infty$$

$$=0(e^r)\ 0\left[\frac{1}{\log r}\right] \text{ ज्यों ज्यों } r\to\infty, \text{ (4.2) द्वारा}$$

$$=0(e^r)\ 0(1) \text{ ज्यों ज्यों } r\to\infty$$

$$=0(e^r) \text{ ज्यों ज्यों } r\to\infty \tag{6.3}$$

अब

$$I_2=\int_{1/r}^{1/r^\alpha} \frac{|\psi(t)|}{t}\,|e^{r\cos t}\sin(r\sin t+t)|\,dt$$

$$=0(e^r)\int_{1/r}^{1/r^\alpha}\frac{|\psi(t)|}{t}\,dt$$

अब

$$\int_{1/r}^{1/r^\alpha}\frac{|\psi(t)|}{t}\,dt=\left|\frac{1}{t}0\left\{\frac{\lambda(1/t)\,t}{\mu(p_r)}\right\}\right|_{1/r}^{1/r^\alpha}+\int_{1/r}^{1/r^\alpha} 0\left[\frac{\lambda(1/t)\,t}{\mu(p_r)}\right]\frac{dt}{t^2}$$

$$=0\left[\frac{\lambda(r^\alpha)}{\mu(p_{r^\alpha})}\right]-0\left[\frac{\lambda(r)}{\mu(p_r)}\right]+0\left[\int_{1/r}^{1/r^\alpha}\frac{\lambda(1/t)\,dt}{\mu(p)_t}\right]$$

$$=0\left[\frac{1}{\log\gamma}\right]-0\left[\frac{1}{\log\gamma}\right]$$

$$+0\left[\frac{\lambda(r^{\alpha})}{\mu(p_r\alpha)}\right]\int_{1/r}^{1/r^{\alpha}}\frac{dt}{t} \text{ ज्यों ज्यों } r\to\infty, (4.2) \text{ से}$$

$$=0(1)-0(1)+0\left[\frac{\lambda(r^{\alpha})}{\mu(p_r\alpha)}(1-\alpha)\log r\right]$$

$$=0(1)-0(1)+0\left[(1-\alpha)\frac{\lambda(r^{\alpha})\log r}{\mu(p_r\alpha)}\right]$$

$$=0(1)-0(1)+0(1) \ (4.2) \text{ से}$$

अत:

$$I_2=0(e^r)\int_{1/r}^{1/r^{\alpha}}\frac{|\psi(t)|\,dt}{t} \text{ ज्यों ज्यों } r\to\infty$$

$$=0(e^r) \text{ ज्यों ज्यों } r\to\infty \qquad (6.4)$$

(6.3), (6.4) को (5.2) के साथ मिलाने पर हमें वांछित परिणाम प्राप्त होता है। अर्थात्

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n}|s_n(x)-f(x)|=0(e^r) \text{ ज्यों ज्यों } r\to\infty$$

इस तरह (1.1) से प्रमेय सिद्ध हो जाता है।

## कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय प्रो० एल० एम० त्रिपाठी, अध्यक्ष, गणित विभाग बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय के अत्यन्त कृतज्ञ हैं जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में बहुमूल्य सुझाव दिये।

## निर्देश

1. फोआ, ए०, Bull. Univ. Mat, Ital., 1943, 5, 18-87
2. हार्डी, जी० एच० तथा लिटिलवुड, जे० ई०, Fund. Math, 1935, 25, 162-189
3. प्रसाद, के०, "इण्डियन जर्नल प्योर एप्ला० मैथ," 1973, 4, 601-605
4. विन, सी० ई०, Math. Zeit., 1933, 37, 481-492

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol, 37, No. 1, 1994

# संथाल तथा बिरहोर जनजाति के फिंगर प्रिंट का अध्ययन

**चतुर्भुज साहु**
मानव विज्ञान विभाग,
गिरिडीह कालेज, गिरिडीह, बिहार-815301

[ प्राप्त—अक्टूबर 10, 1993 ]

## सारांश

प्रस्तुत शोध कार्य संथाल जनजाति के 164 पुरुष तथा विलुप्त हो रहे बिरहोर के 80 पुरुषों के फिंगर प्रिंट के त्वचीय प्रतिरूप का वर्णन है। इसके साथ ही साथ प्रतिरूपों की बारम्बारता एवं सूचकांक (Indices) का तुलनात्मक अध्ययन किया गया है। संथाल बिहार की सबसे अधिक जनसंख्या वाली जनजाति है। बिरहोर आदिम, घुमन्तू तथा विलुप्त हो रही जनजाति है तथा इसके लोग दिन भर जंगलों में शिकार या कन्द-मूल के लिए घूमते रहते हैं।

अंगुली के ऊपरी पोरों में मुख्यत: होर्ल तथा लूप प्रतिरूप पाये जाते हैं लेकिन मध्य तथा आधार खण्डों में आर्च प्रतिरूप की बहुलता पायी जाती है। मध्य तथा आधार खण्डों में आर्च के अलावा अन्य प्रतिरूप जैसे—स्ट्रेट, हुक, वेवी (Wavy), एंगल, आर्च एवं एंगल, डबल एंगल, ड बल आर्च डबल आर्च एवं एंगल, एनक्लोजर पाये जाते हैं।

प्रस्तुत अध्ययन में दोनों ही जनजाति में होर्ल प्रतिरूप की बारम्बारता अधिक पायी गयी है। संथाल में 32 और बिरहोर में 19 ऐसे उदाहरण मिले हैं जिनकी सभी अंगुलियों में होर्ल प्रतिरूप हैं तथा दोनों में संकेन्द्रीय होर्ल अन्य सभी होर्लों से अधिक हैं। होर्ल प्रतिरूप का अधिक मान बिरहोर के बाँये हाथ की II, IV एवं V डिजिट में है लेकिन दाहिने हाथ तथा संथाल के दोनों हाथों में इस प्रतिरूप का अधिकतम मान I,II एवं IV डिजिट में पाया गया है। दोनों जनजातियों में III एवं V डिजिट में लूप का मान अधिक पाया गया है (बिरहोर के V डिजिट को छोड़कर)।

होर्ल-लूप अनुपात से पता चलता है कि इनके अनुपात का वितरण बहुत ही सामान्य है। कुछ उदाहरणों के त्वचीय प्रतिरूपों में विभिन्न मान प्राप्त हुए हैं। यह सम्भवत: जीनी कारकों के उत्तर-

दायित्व का हीपरिणाम हो सकता है। बिरहोर में आर्च प्रतिरूप अधिक है फिर भी त्वचीय प्रतिरूप के आधार पर दोनों एक-दूसरे के समरूप हैं। साथ ही साथ ये दोनों बिहार की ही मुण्डा जनजाति से मिलते-जुलते त्वचीय प्रतिरूप वाली जनजाति हैं तथा अधिकांशत: उराँव जनजाति से भिन्न हैं।

**Abstract**

**Study of finger dermatoglyphics among the tribes of Santhal and Birhor.** *By* Chaturbhuj Sahu, Department of Anthropology, Giridih College, Giridih, Bihar.

Present paper is the study of finger print pattern of 164 male Santhal and 80 male Birhor (a vanishing tribe of Chotanagpur, Bihar). Comparison of pattern frequency and indices has also been made. The Santhal is settled agriculturist and most numerous tribal population of Bihar while the Birhor is most primitive, nomadic and vanishing tribe. These tribes are the most ancient ethnic group of India but little work has been done on the Physical Anthropology.

The Human finger balls are characterised by whorl and loop pattern while the arch pattern is found on the middle and basal phalanges. The patterns e. g. Straight, Hook, Wavy, Angle, Arch and Angle, Double Angle, Double Arch; Double Arch and Angle, Enclosure have heen observed only in middle and basal phalanges.

It is found that frequency of whorls is much higher in both the tribes. Whorl pattern has been found in all fingers among 32 Santhals and 19 Birhors in both the cases, digit I and IV are generally showing similar trend in whorl : loop proportions. Whorls are much higher in proportion to loop while digit III shows much less frequency of whorls than the loops. The digitwise distribution of whorl : loop proportion presents a generalised frequency distribution. The dissimilar whorl : loop proportion in some cases might be due to genetic factors.

The Santhal and Birhor are much closer to the Munda so far as the finger dermatoglyphic trait is concerned.

बिहार भारत गणराज्य का एक महत्वपूर्ण राज्य है तथा जनसंख्या की दृष्टि से यह दूसरा सबसे बड़ा राज्य है। प्राकृतिक वातावरण की दृष्टि से इसे मुख्यत: दो भागों में बाँटा गया है— गंगा का मैदानी क्षेत्र या गांगेय प्रदेश तथा छोटा नागपुर का पठार।

गंगा के मैदानी भाग की भूमि काफी उपजाऊ है इसलिए यहाँ तीन-चौथाई भूमि पर खेती की जाती है। भूमि उपजाऊ होने के कारण ही इस क्षेत्र में बिहार की कुल आबादी का तीन-चौथाई है और शेष एक-चौथाई भाग छोटा नागपुर के पठारी भाग में है। छोटा नागपुर का पठार बिहार के आधे से कम भाग में फैला हुआ है। यह प्राचीन चट्टानों से बने प्रायद्वीपीय पठार का उत्तरी-पूर्वी भाग है। यह

प्राचीन आग्नेय और कायान्तरित चट्टानों से बना है। इसकी ऊँचाई समुद्र तल से 300 से 1000 मीटर के बीच है। बिहार को सबसे ऊँची चोटी पारसनाथ की ऊँचाई लगभग 1366 मीटर है।

अध्ययन के क्रम में यह पाया गया है कि बिहार में मुख्यतः दो प्रजातीय लोग रहते हैं। मैदानी भाग में रहने वाले लोग लम्बे सिर, लम्बी नाक, औसत कद, तरंगित बाल तथा गौर वर्ण वाले हैं जबकि पठारी क्षेत्र के लोग नाटे कद, डोलिकोसिफेली, छोटी, चौड़ी और चिपटी नाक, छोटा चेहरा, घुंघराले काले बाल एवं काले वर्ण के हैं। इनके सामान्य जन-जीवन पर भौगोलिक वातावरण का भी बहुत अधिक प्रभाव पड़ा है। पठारी भाग आदिवासियों का निवास स्थान है इसलिए इसे **आदिवासी क्षेत्र** कहा जाता है।

ऐतिहासिक अध्ययनों से यह पता चलता है कि मुस्लिम शासक आदिवासियों के सीधे सम्पर्क में आने के बावजूद भी आदिवासियों की सामाजिक एवं आर्थिक स्थिति को प्रभावित नहीं कर सके जबकि अँग्रेज और उनके साथ मिशिनरियों ने छोटा नागपुर के कुछ क्षेत्रों में आदिवासियों की सामाजिक एवं आर्थिक स्थिति में काफी परिवर्तन ला दिया। औद्योगिकीकरण के कारण भी औद्योगिक क्षेत्रों में आदिवासी प्रभावित हुए बिना नहीं रह सके। सुदूर गाँवों में रहने वाली जनजाति सदियों से अकेले और छोटी प्रजनन यूनिटों में रहती आई है जहाँ वे अप्रभावित रहीं। इन जगहों के आदिवासी शारीरिक मानव विज्ञान एवं मानव आनुवंशिकी के लिए बहुत ही उपयोगी स्रोत हैं तथा मानव आनुवंशिकी अध्ययन के लिए एक बड़ी जनसंख्या है। चूँकि वे कई शताब्दियों से छोटे कुल की इकाई के रूप में अलग रहते आये हैं इसलिए यह अनुमान किया जाता है कि इन अलग रहने वाले छोटे समूहों में गंगा के समतल में रहने वाली जातियों की तुलना में वरण (प्राकृतिक) और आनुवंशिक विचलन अत्यधिक क्रियाशील होंगे जिनमें असाधारण और दुर्लभ लक्षण की बारम्बारता अत्यधिक है। इसी उद्देश्य से संथाल एवं बिरहोर जन-जाति को चुना गया है। इन दोनों जनजातियों के फिंगर डरमेटोग्लायफिक्स का सामान्य परिचय देते हुए तुलनात्मक अध्ययन भी किया गया है। इनकी तुलना बिहार की ही कई अन्य जनजातियों तथा जातियों से भी की गई है।

**डरमेटोग्लायफिक्स**

मानव शरीर त्वचा से ढका रहता है लेकिन अँगुली, हथेली एवं तलवे की त्वचा शरीर के अन्य भागों से भिन्न होती है। इनमें बाल तथा सुवेसियस ग्रन्थियाँ नहीं होती हैं। इन स्थानों में भ्रूणावस्था में ही बालों में लगातार सिकुड़न होती है जिससे वे महीन रेखाओं में परिवर्तित हो जाती हैं। यह गुण सभी प्राइमेटों में पाया जाता है। इन स्थानों के त्वचीय प्रतिरूप का यथार्थ वर्णन करने वाला कोई उपयुक्त शब्द नहीं था लेकिन 1926 ई० में इनके लिए **डरमेटोग्लायफिक्स** (dermatglyphics) शब्द निकला। यह एक सामूहिक नाम है जिसमें अँगुली, हथेली और तलवे की त्वचा की ऊपरी परत में बनने वाले विभिन्न प्रकार के प्रतिरूपों का अध्ययन किया जाता है। त्वचा दो सतहों—**एपिडरमिस** और **डरमिस**—से बनी होती है। प्रतिरूप एपिडरमिस सतह में ही बनते हैं। फ्लेक्सन क्रीज तथा अन्य प्रकार के मोड़ डरमेटोग्लायफिक्स के तत्व नहीं होते हैं। त्वचीय प्रतिरूप का आकार अस्थायी तौर पर कटने,

जलने, चर्म रोग आदि कारणों से बदल सकता है परन्तु इन रोगों के ठीक हो जाने से त्वचीय प्रतिरूप पुनः अपनी मूल आकृति में आ जाता है। इन प्रतिरूपों को बनाने वाली ग्रन्थियों को किसी कारणवश, जैसे बीमारी, आकस्मिक चोट आदि से स्थायी रूप से नष्ट हो जाने पर प्रतिरूपों की आकृति भी बदल सकती है। पुरुष का त्वचीय प्रतिरूप महिलाओं के त्वचीय प्रतिरूपों से अधिक रक्षा होती है। भ्रूण के 13वें सप्ताह में ही जो प्रतिरूप बन जाता है वह आजीवन उसी रूप में रहता है। यह प्रत्येक व्यक्ति में अलग-अलग होता है। मोनोजाइगोटिक जुड़वे बच्चे में भी महीन रेखाओं की संख्या भिन्न-भिन्न होती है। प्रतिरूपों की यह विभिन्नता आनुवंशिक होती है और इनके विकास में अनेक जीनों का योगदान होता है। इसका प्रयोग अनेक आनुवंशिकीय अध्ययनों में किया जाता है।

डरमेटोग्लायफिक्स का अध्ययन मानव के लिए अति प्राचीन काल से ही महत्वपूर्ण विषय रहा है लेकिन इसका वैज्ञानिक अध्ययन 17वीं शताब्दी से प्रारम्भ होता है। वैज्ञानिक अध्ययनों के आधार पर यह सुझाव दिया गया है कि त्वचीय प्रतिरूप चूँकि प्रत्येक व्यक्ति में अलग-अलग होता है इसलिए इसके द्वारा अपराधियों को पहचाना जा सकता है। गाल्टन[1] ने अपने अध्ययन में देखा कि सभी प्रजातियों में अलग-अलग संख्या में रेखाएँ होती हैं। इन्होंने प्रतिरूपों को W—L—A (होर्ल—लूप—आर्च) में विभक्त किया।

प्रिंटिग विधि :

त्वचीय प्रतिरूप की छाप लेने के लिए प्रिंटर्स इंक, अच्छे किस्म का सफेद कागज, इंकिंग पैड, शीशे या प्लास्टिक की शीट तथा लकड़ी या कुट का तख्ता आदि की आवश्यकता होती है। प्रिंटिग इंक में एक प्रकार का तेल होता है जिसके कारण स्याही बहुत ही जल्द सूख जाती है। सर्वप्रथम प्रिंट लेने वाले व्यक्ति के हाथ/पाँव को अच्छी तरह धोकर सूखने के लिए छोड़ दिया जाता है। प्रिंटिग इंक की थोड़ी मात्रा ग्लास शीट में डालकर पैड से इस प्रकार फैलाया जाता है ताकि पतली परत या फिल्म की तरह बन जाय। अब व्यक्ति के हाथ को ग्लास शीट में सावधानी से रखते हैं ताकि ग्लास शीट की इंक व्यक्ति के हाथ में लग जाय। लेकिन यह विधि उतनी लाभदायक नहीं होती है इसलिए प्रस्तुत अध्ययन में दूसरी विधि अपनायी गयी है। ग्लास शीट में प्रिंटिंग इंक को पैड से फैलाने के बाद पैड से व्यक्ति के अंगुली या हथेली में एक छोर से दूसरे छोर की ओर हल्के दबाव के साथ स्याही लगाते हैं। हथेली और अंगुली दोनों का प्रिंट लेना रहता है तो सर्वप्रथम हथेली में ही स्याह लगाते हैं। हथेली की प्रिंटिग करते समय ध्यान रखा जाता है कि प्रिंटिग कलाई तक हो और अंगुली के प्रोक्सिमल फैलेंजियल क्रीज तक हो। अब हथेली को कुट के तख्ते पर रखे सफेद कागज पर इस प्रकार रखते हैं ताकि कलाई का हिस्सा सर्वप्रथम कागज को छुवे। साथ ही साथ हथेली को कागज पर बैठाते समय यह देखा जाता है कि उसकी सभी अंगुलियाँ अधिकतम फैली हुई हों। हथेली को कागज पर बैठाने के बाद हथेली के बीच भाग को ऊपर से दबाया जाता है ताकि हथेली के मध्य भाग का प्रतिरूप भी प्रिंट हो जाये। चूंकि हाथ की सभी अंगुलियाँ फैली हुई होती हैं इसलिए ट्राइरेडियस एवं अन्य प्रतिरूप स्पष्ट रूप से अंकित हो जाते हैं। हथेली के मध्य भाग को दबाने के बाद अंगुली और अन्तर अंगुलीय क्षेत्रों को भी अंगुली से दबाय/

जाता है ताकि पूरे क्षेत्र की त्वचीय प्रतिरूप अंकित हो जाए। अब हथेली को अलनर क्षेत्र की ओर दबाते हुए अँगूठे को पकड़ कर अलनर की तरफ घुमाया जाता है। इससे अलनर क्षेत्र का प्रतिरूप अंकित होता है। कभी-कभी इस क्षेत्र में भी ट्राइरेडियस पायी जाती है। इसके बाद हाथ को उठा दिया जाता है। इसी प्रकार दूसरे हाथ का प्रिंट लिया जाता है। सुविधा के लिए दोनों प्रिंटों के बीच एक रेखा खींच दी जाती है।

**अंगुली की प्रिंटिंग**

पूरी अंगुली की प्रिंटिंग करने के लिए सुविधा की दृष्टि से इसे दो खण्डों में बाँट दिया जाता है :

(i) अंगुली के ऊपरी पोरों की प्रिंटिंग

(ii) मिडिल तथा बेसल फैलेंजियल प्रिंटिंग

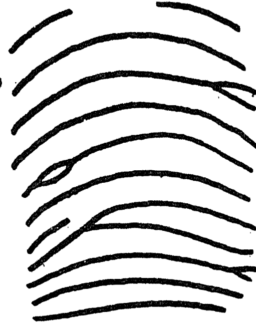
(1) **ऊपरी पोरों की प्रिंटिंग** : ऊपरी पोरों को प्रिंट करने के लिए ऊपरी पोरों के साथ-साथ मध्य पोरों के कुछ हिस्से की भी इंकिंग की जाती है जिससे इन्टरफैलेंजियल क्रीज का प्रतिरूप आ सके। इसके बाद सबसे पहले अंगूठे को कागज के एक किनारे पर आडे रखते हैं और उसे हल्के दबाव के साथ-दूसरी ओर (अलनर की ओर) तक घुमाते हैं जिससे दोनों तरफ के प्रतिरूप अंकित हो सकें। इसी प्रकार अन्य अंगुलियों की छाप एक के बाद एक करके कागज के उसी ओर ली जाती है। प्रिंट लेने के बाद पेंसिल से बाँये हाथ के लिए Lt तथा दाँये हाथ के लिए Rt लिख देते हैं। इसके बाद अंगूठे की छाप के ऊपर I लिख देते हैं और अन्य अंगुलियों की ओर इंगित करते हुए → (तीर) का निशान बना देते हैं ताकि यह आसानी से समझा जा सके कि छाप एक अंगुली के बाद दूसरे की है। यदि किसी अंगुली की प्रिंटिंग ठीक नहीं हो तो पुनः उस अंगुली की प्रिंट ली जाती है और उस प्रिंट के ऊपर I या II या अन्य जो भी हो लिख दिया जाता है। इसी प्रकार दूसरे हाथ की अंगुलियों का प्रिंट लिया जाता है और बीच में एक रेखा खींच दी जाती। इसे और भी उपयोगी बनाने के लिए व्यक्ति का नाम, उम्र, लिंग आदि भी लिख दिया जाता है।

यही क्रिया वेसल तथा मिडिल फैलेंजेज के लिए उपयुक्त है।

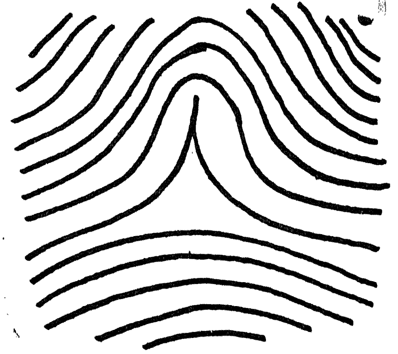
बिना स्याही के भी ये छापें लेना सम्भव है। पुलिस शोधशालाओं में प्रायः स्याहीरहित विधि का ही प्रयोग किया जाता है परन्तु यह सभी बहुत खर्चीली होती है (रिपुदमन[2])।

अंगुली के त्वचीय प्रतिरूपों का पारिभाषिक तौर पर विश्लेषण करने से तीन मूल महत्वपूर्ण आकृतियाँ प्राप्त होती हैं—टाइप लाइन, कोर एवं डेल्टा।

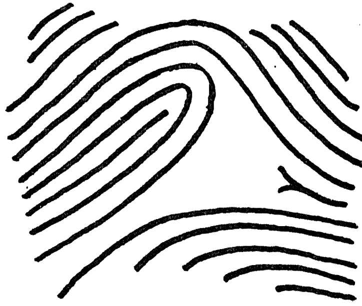
**टाइप लाइन** : ये आन्तरिक रिजेज हैं जो प्रतिरूप क्षेत्र को घेरती हैं। ये रिजेज समानान्तर क्रम में बढ़ती हैं और फिर अलग होकर प्रतिरूप क्षेत्र को घेरती हैं। यही वह क्षेत्र है जहाँ प्रतिरूप के लक्षणों को निर्धारित किया जाता है। अंगुली में जब लूप प्रतिरूप बनता है तो टाइप लाइन को X, Y अक्षर से सम्बोधित किया जाता है।



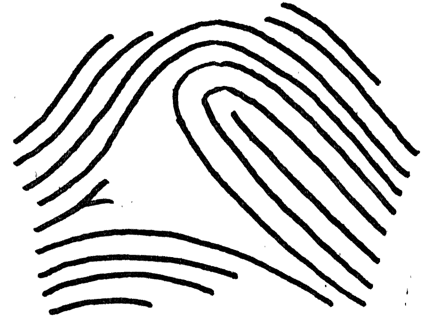
प्लेन आर्च



टेन्टड आर्च



लूप रेडियल (दांया हाथ)



लूप अलनर (दांया हाथ)



होर्ल– दक्षिणावर्ता (सिंगल स्पायरेल)



लेटरल पॉकेट लूप

चित्र 1

**कोर एवं डेल्टा**

अधिकांश फिंगर प्रिंट प्रतिरूप में निश्चित केन्द्र बिन्दु होता है जिन्हें कोर या आन्तरिक टरमिनस एवं डेल्टा या बाह्य टरमिनस कहते हैं। कोर त्वचीय प्रतिरूप के केन्द्र के निकट होता है जबकि डेल्टा पहला होने वाला (≺), टूटा या उखड़ा हुआ रिज इंडिग्स, एनक्लोजर (≺≻), डाट (■), टूटा हुआ रिज (S) या किसी भी प्रकृति का बना हुआ रिज आदि है। डेल्टा को 'D' अक्षर से सम्बोधित किया जाता है।

**खुला (ओपेन) एवं बन्द (क्लोज्ड) डेल्टा**

खुला डेल्टा अकेले डाट खण्ड के द्वारा प्रतिनिधित्व करता है या कोई दूसरा त्वचीय प्रतिरूप बनता है जो मध्य में स्थित होता है। इस जगह टाइप लाइनें अलग होती है और किसी भी पड़ोसी रचना से नहीं मिलती हैं।

बन्द डेल्टा का निर्माण उस समय होता है जब रिज (ridge) अलग होती है या दो भागों में बँटकर आगे निकलती है और इस बिन्दु पर दो निकली हुई रिज विपरीत दिशा में चलकर उस क्षेत्र को पार करती हैं जहाँ पर टाइप लाइन अलग होती है (अतः अलग करना या खुलने को बन्द करना)। यदि केन्द्रीय लूप एक लाइन को घेरती है तो रिज की चोटी ही कोर है, और यदि एक से अधिक लाइनें हैं तो केन्द्रीय स्पाइन ही कोर है। जब केन्द्रीय लूप अधिक लाइनों को घेरती है तो डेल्टा का सबसे दूर वाला लाइन कोर है।

**फिंगर प्रिंट के त्वचीय प्रतिरूप**

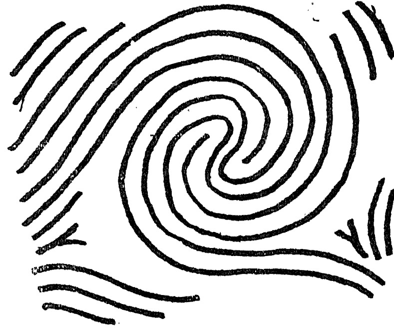
ई० आर० हेनरी ने अंगुली के त्वचीय प्रतिरूपों को चार मुख्य भागों में वर्गीकृत किया है—आर्च, लूप, वास्तविक होर्ल एवं कम्पोजिट। लेकिन साधारणतया इन प्रतिरूपों को मुख्यतया तीन ही प्रकारों में विभक्त किया गया है—आर्च, लूप एवं होर्ल। ये तीनों प्रतिरूप मुख्यतः अंगुली के ऊपरी पोरों पर ही होते हैं, परन्तु इसका वितरण हथेली तथा तलवों के विभिन्न भागों में भी होता है।

**आर्च** : आर्च दो प्रकार के होते हैं—

(i) समतल (प्लेन) आर्च एवं (ii) टेन्टेड (तम्बूदार) आर्च

(i) **प्लेन आर्च** : इस प्रतिरूप में रिज एक किनारे से लेकर दूसरी ओर तक बिना ऊपर या नीचे की ओर उभार लिए हुए होते हैं। साधारणतः इसमें डेल्टा नहीं होता है।

(iii) **टेन्टेड आर्च** : यह भी प्लेन आर्च ही है लेकिन रिजें मध्य में ऊपर की ओर उठी हुई होती हैं और तरंग के समान आकृति बन जाती है।



यमल (ट्विन) लूप



संकेन्द्री होर्ल



होर्ल - वामावर्ता



द्विगुण कुंडलीद्धार होर्ल



सेन्ट्रल पॉकेट लूप



एक्सीडेन्टल पैटर्न

चित्र 2

**लूप**

इसमें एक ट्राइरेडियस होती है तथा रेखाएँ जिस ओर से अन्दर आती हैं उसी ओर से वापस निकलती हैं। यदि यह छोटी अंगुली (V) की ओर खुलती है तो उसे लूप अलनर कहते हैं तथा अँगूठे (I) की ओर खुलने वाली को लूप रेडियल कहते हैं।

**होर्ल**

इस प्रतिरूप में एक या अधिक रेखाएँ वृत्त के समान घूमी हुई होती हैं। इसमें दो डेल्टा होते हैं जो प्रतिरूप के दोनों ओर स्थित होते हैं। सामान्यतः होर्ल वृत्ताकार, कुण्डलीनुमा या अन्य प्रकार के होते है। रेखाओं के आधार पर होर्ल कई प्रकार के होते हैं—

(i) **संकेन्द्री (concentric) होर्ल** : इसमें रेखाएँ कोर के चारों ओर संकेन्द्री वृत्त के रूप में होती हैं।

(ii) **एकल कुण्डलीदार (single spiral) होर्ल** : इसमें एक ही रेखा कुण्डलीनुमा घुमी हुई होती है।

(iii) **द्विगुण कुण्डलीदार होर्ल** : इसमें दो रेखाएं विपरीत दिशा में घुमी हुई होती हैं। रेखा की घूमने की दिशा के आधार पर इसे घड़ी की सुईनुमा या घड़ी की सुई की विपरीत दिशा में घूमने वाली पद्धति में विभक्त किया जाता है।

**कम्पोजिट**

कुछ ऐसे भी प्रतिरूप पाये जाते हैं जो लूप और होर्ल के बीच के होते हैं।

(i) **सेन्ट्रल पॉकेट लूप** : इस प्रकार के प्रतिरूप में अधिकांश रेखाएँ लूप के समान ही होती हैं परन्तु एक या अधिक रेखाएँ अपने क्षेत्र में ही मुड़कर पॉकेट के समान रचना बनाती है।

(ii) **ट्विन लूप** : इस दो स्पष्ट लूप होते हैं। एक घूमा हुआ होता है या एक-दूसरे के ऊपर चढ़ा हुआ है।

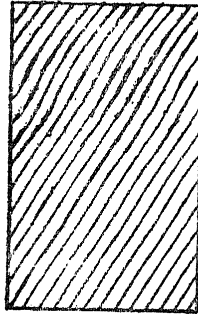
(iii) **लेटेरल पॉकेट लूप** : इसमें भी ट्विन लूप के समान ही दो पॉकेट होते हैं परन्तु इसमें कोर लाइन बिना विभाजित हुए फैली रहती है।

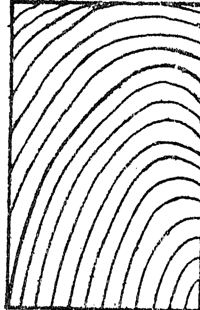
**एक्सीडेन्टल पैटर्न**

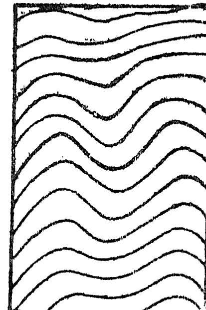
इस प्रकार के प्रतिरूप में दो से अधिक डेल्टा पाये जाते हैं जिसमें कोई निश्चित आकृति नहीं होती है। इस प्रकार के प्रतिरूपों के लिए किसी निश्चित शब्द का उपयोग नहीं किया जाता है।

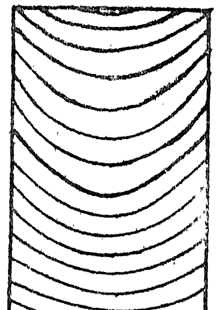
इन सभी प्रतिरूपों को चित्र के द्वारा स्पष्ट रूप से दर्शाया गया है।

## BASIC PATTERN TYPES

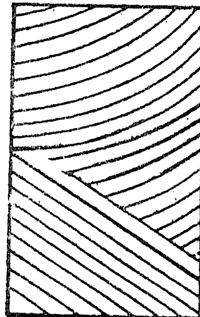

STRAIGHT

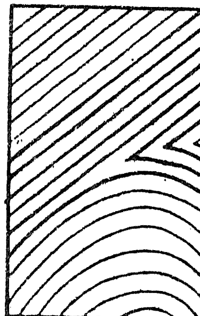

HOOK


WAVE

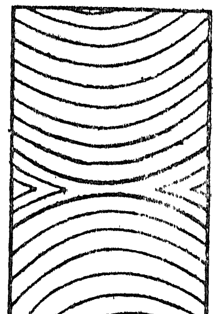

ARCH

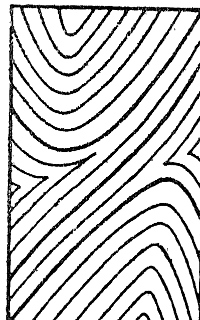
## COMPOSITE PATTERN TYPES

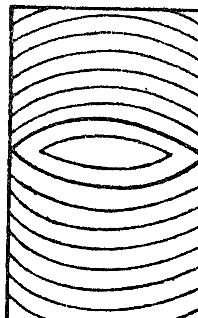

ANGLE

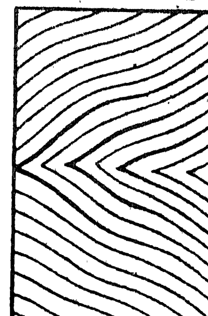

ARCH AND ANGLE

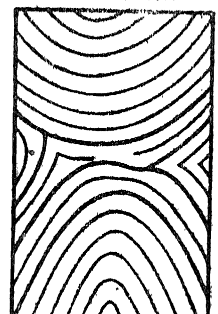

DOUBLE ANGLE


DOUBLE ARCH


DOUBLE ARCH & ANGLE


ENCLOSURE


FEATHER


ACCIDENTAL

चित्र 3

## रिज कांउटिंग एवं ट्रेसिंग

लूप प्रतिरूप में रेखाओं की गिनती करने के लिए डेल्टा और कोर की वास्तविक स्थिति निर्धारित की जाती है। इसके बाद डेल्टा से कोर तक एक सीधी रेखा खींची जाती है या सीधी रेखा की कल्पना कर ली जाती है और तब इन दोनों के बीच जो रेखाएँ होती हैं उन्हें ही गिना जाता है।

होर्ल प्रतिरूप में रेखा की ट्रेसिंग करने के लिए कुछ नियमों का पालन करना पड़ता है। इस प्रतिरूप में दो डेल्टा—बाईं और दाईं ओर होते हैं। जब दोनों डेल्टाओं के स्थान का पता लग जाता है तब बाँये डेल्टा के निचले हिस्से से निकलने वाली रेखा का अनुसरण बाँये से दाँये की ओर दाँये डेल्टा तक किया जाता है।

## मिडिल तथा बेसल फैलेंजेज का त्वचीय प्रतिरूप

शोधकर्त्ताओं ने त्वचीय प्रतिरूप के अध्ययन के क्रम में अंगुली के ऊपरी के पोरों को ही केन्द्र विन्दु बनाया इसलिए अंगुली के मध्य एवं आधार खण्डों के त्वचीय प्रतिरूपों पर बहुत ही कम शोध कार्य हुआ है, जबकि वैयक्तिक पहचान के लिए इन प्रतिरूपों का भी उतना ही महत्व है जितना ऊपरी पोरों के प्रतिरूपों का है। इस सम्बन्ध में चटर्जी[3], सिंह[4,5], कल्याण सुन्दरम[6] आदि के कार्य महत्व-पूर्ण मैंकआर्थर[7] ने यह भी स्पष्ट कर दिया है कि मोनोजायगोटिक और डाइजायगोटिक ट्विन्स को पहचानने में आधार खण्डों के त्वचीय प्रतिरूपों का बहुत ही महत्वपूर्ण योगदान है।

सर्वप्रथम ह्वीपलर[8] ने अंगुली के मध्य एवं आधार खण्डों की रेखाओं के झुकाव पर अध्ययन किया और स्पष्ट रूप से बताया कि इन खण्डों में विपरीत दिशाओं में खुलने वाली तिरछी झुकी हुई रेखाओं की दो पद्धतियाँ होती हैं जिनसे कोई पकड़ी हुई वस्तु फिसलती नहीं है। उन्होंने यह भी बताया कि इन खण्डों में त्वचीय प्रतिरूपों का निश्चित आकार पाया जाता हैं। पिकुज[9] ने अपने अध्ययन के क्रम में यह पाया कि इन खण्डों में सीधा (क्वायर) या आर्च जैसा प्रतिरूप पाया जाता है जो I, II एवं III अंगुली में प्रोक्सिमोरेडियल की ओर खुलता है जबकि IV एवं V में झुका हुआ होता है और प्रोक्सिमोअलनर की ओर खुलता है।

प्लोट्ज-रदमन[10] ने सर्वप्रथम जर्मनियों की अंगुली के मध्य एवं आधार खण्डों के त्वचीय प्रतिरूप का गहन अध्ययन किया और प्रतिरूपों को 4 मुख्य प्रकारों में वर्गीकृत किया—सीधा (St), हुक (H), तरंग (W) एवं आर्च (A)। इन प्रतिरूपों को पुनः वर्गीकृत कर 8 भागों में बाँटा—एंगल (An), आर्च एवं एंगल (AAn), डबल एंगल (DAn), डबल आर्च एवं एंगल (DAAn), डबल आर्च (DA), एनक्लोजर (En), फीदर (F) एवं एक्सीडेन्टल (Ac)। इन प्रतिरूपों को चित्र में स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है। इतना ही नहीं, उन्होंने इन त्वचीय प्रतिरूपों का अध्ययन आनुवंशिक एवं जीनी संदर्भ में किया और यह निष्कर्ष निकाला कि मध्य एवं आधार खण्डों के त्वचीय प्रतिरूप आनुवंशिक कारकों द्वारा नियन्त्रित होते हैं। किंग[11] ने इन्हीं प्रतिरूपों का अध्ययन चीनी लोगों पर किया और इतने ही प्रकार के त्वचीय प्रतिरूप प्राप्त किए।

## सारणी 1

त्वचीय प्रतिरूप के विभिन्न प्रकारों की बारम्बारता (% के साथ) संथाल $n=164$

| प्रतिरूप | दांया हाथ I | II | III | IV | V | बांया हाथ I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 8 (4.88) | 14 (8.5) | 5 (3.05) | 2 (1.22) | — | 2 (1.22) | 16 (9.76) | 10 (6.10) | 4 (2.44) | 2 (1.22) |
| $L^R$ | 2 (1.22) | 14 (8.5) | 5 (3.05 | — | — | — | 10 (6.10) | 3 (1.83) | — | — |
| $L^U$ | 50 (30.5) | 54 (32.9) | 90 (54.9) | 60 (36.5) | 104 (63.5) | 72 (43.9) | 64 (39.0) | 79 (47.03) | 42 (26.28) | 84 (49.26) |
| W | 92 (56.1) | 80 (48.8) | 64 (39.0) | 102 (62.2) | 60 (36.5) | 78 (47.5) | 74 (45.10) | 70 (42.6) | 114 (67.52) | 76 (46.98) |
| $T^L$ | 8 (4.88) | — | — | — | — | 12 (7.32) | — | 2 (1.22) | 2 (1.22) | — |
| C. P. L. | 2 (1.22) | 2 (1.22) | — | — | — | — | — | — | — | 2 (1.22) |
| ACC. | 2 (1.22) | — | — | — | — | — | — | — | 2 (1,22) | — |

बिरहोर $n=80$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 6 (7.5) | 6 (7.5) | 7 (7.5) | — | — | 8 (10.0) | 9 (11.25) | 8 (10.0) | 1 (1.25) | 1 (1.25) |
| $L^R$ | 1 (1.25) | 6 (7.5) | 5 (6.25) | — | — | 2 (2.5) | 3 (3.75) | — | — | — |
| $L^U$ | 23 (28·73) | 20 (25.0) | 39 (48.75) | 34 (42.5) | 50 (62.5) | 34 (42.5) | 26 (32.5) | 36 (45.0) | 22 (27.5) | 26 (32.5) |
| W | 43 (53.75) | 40 (50.0) | 29 (36.25) | 46 (57.5) | 29 (36.25) | 31 (38.75) | 40 (50.0) | 36 (45.0) | 56 (70.0) | 51 (63.75) |
| $T^L$ | 4 (5.0) | 3 (3.75) | — | — | — | — | — | — | — | — (1.25) |
| C. P. L. | 2 (2.5) | 3 (3.75) | — | — | 1 (1.25) | 3 (3.75) | — | — | — | — |
| ACC. | 1 (1.25) | 2 (2.5) | — | — | — | 2 (2.5) | 2 (2.5) | — | 1 (1.25) | — |

A=आर्च, $L^R$=लूप रेडियल, $L^U$=लूप अलनर, W=होर्ल, $T^L$=ट्विन लूप, C. P. L.=सेन्ट्रल पॉकेट लूप,
ACC=एक्सीडेन्टल

**प्राइमेट अध्ययन**

क्रमिन्स तथा मिडलो[12] ने प्रोसिमियन्स के मध्य एवं आधार खण्डों में किसी भी प्रकार का त्वचीय प्रतिरूप नहीं पाया जबकि कई न्यू वर्ल्ड मंकी में इन्हीं क्षेत्रों में अपूर्ण त्वचीय प्रतिरूप पाया। ओरांग उटान के आधार खण्डों में कभी-कभी युग्म प्रतिरूप पाया गया है परन्तु मानव में इस प्रकार का प्रतिरूप बहुत ही मुश्किल से देखने को मिलता है। कमिन्स तथा स्प्रेग[13] ने चिम्पैंजी और मानव के मध्य एवं आधार खण्डों के त्वचीय प्रतिरूप का तुलनात्मक अध्ययन किया। चिम्पैंजी में आधार खण्डों का 20% तथा मध्य खण्डों का 9% वास्तविक प्रतिरूप (टिपिकल लूप) हैं जबकि मनुष्य में इस प्रकार का प्रतिरूप नगण्य है।

आजकल भारत में त्वचीय प्रतिरूपों पर शोधकार्य उपलब्ध हैं परन्तु तुलनात्मक रूप से बिहार में बहुत ही कम शोध कार्य हुआ है। बिहार की दो प्रमुख जनजातियाँ मुण्डा एवं उरांव की अंगुली एवं हथेली के त्वचीय प्रतिरूप पर कार्य हुए हैं (वर्मा[14], मुखर्जी एवं चक्रवर्ती[15], चक्रवर्ती[16], दास शर्मा[17], दास शर्मा एवं साहु[18], शुक्ला एवं त्यागी[19])। इन्हीं जनजातियों के सोल प्रिंट पर दास शर्मा[20] के अलावा कोई कार्य नहीं हुआ है। आदिम जनजाति बिरहोर पर साहु[21,22,23] ने सोल प्रिंट के अलावा हथेली, अंगुली एवं अन्य क्षेत्रों में तथा गुप्ता एवं अन्य[24] ने फिंगर प्रिंट पर कार्य किया है। इसी प्रकार संथाल जनजाति पर विश्वास[25,26] तथा साहु[27,28] के कार्यों के अतिरिक्त किसी भी प्रकार के त्वचीय प्रतिरूप का अध्ययन नहीं किया गया है जबकि संथाल बिहार की सबसे अधिक जनसंख्या वाली जनजाति है। यह उत्तरी-पूर्वी भारत की प्रमुख जनजातियों में से एक है तथा बिहार में मुख्य रूप से संथाल परगना, हजारी बाग, गिरिडीह, धनबाद, तथा सिंहभूम आदि जिलों में पायी जाती है। हटन[29] ने इन्हें प्रोटोआस्ट्रोल्वाइड की संज्ञा दी है। इनकी भाषा संथाली है जो अनार्यन या आस्ट्रीक भाषा-परिवार के अन्तर्गत आती है। बिरहोर बिलुप्त हो रही आदिम जनजाति है जो गिरिडीह, हजारीबाग, राँची आदि जिलों के जंगली क्षेत्रों में पायी जाती है।

## प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन में संथाल तथा बिरहोर जनजाति में अंगुली के ऊपरी तथा अन्य पोरों में पाये जाने वाले त्वचीय प्रतिरूपों का वर्णन करते हुए उनकी बारम्बारता को दर्शाया गया है तथा उनके सूचकांक का तुलनात्मक अध्ययन किया गया है। इसके लिए संथाल जनजाति के 164 पुरुषों तथा आदिम जनजाति बिरहोर के 80 पुरुषों का फिंगर प्रिंट लिया गया है तथा उसका विश्लेषण कमिन्स तथा मिडलो [30] के आधार पर किया गया है। तुलनात्मक अध्ययन के लिए प्रकाशित आँकड़ों को काम में लाया गया है।

## परिणाम तथा विवेचना

सारणी-1 में त्वचीय प्रतिरूप के विभिन्न प्रकारों की बारम्बारता को दर्शायी गयी है। होर्ल प्रतिरूप की बारम्बारता दोनों ही हाथ के डिजिट I, II एवं IV में अन्य सभी प्रतिरूपों से अधिक पायी

गयी है। उसके बाद लूप अलनर की स्थिति आती है। लूप अलनर की स्थिति दाँये हाथ की डिजिट III एवं V में क्रमशः 54.9% तथा 63.5% है जबकि बाँये हाथ में III एवं V डिजिट में क्रमशः 47.03% तथा 49.26% है। बाँये हाथ के IV डिजिट में होर्ल का मान सबसे अधिक (67.52%) प्राप्त हुआ है जबकि लूप अलनर का सबसे अधिक मान दाँये हाथ के V डिजिट में मिला है। दाँये हाथ के I डिजिट में आर्च प्रतिरूप के साथ-साथ अन्य प्रतिरूप—लूप रेडियल; ट्विन लूप, सेन्ट्रल पॉकेट लूप, एक्सीडेन्टल भी मिले हैं जबकि बाँये हाथ में लूप रेडियल, सेन्ट्रल पॉकेट लूप एवं एक्सीडेन्टल प्रतिरूप का अभाव है। दाँये हाथ में लूप अलनर एवं होर्ल की बारम्बारता में काफी अन्तर है जबकि बाँये हाथ में दोनों ही प्रतिरूपों की बारम्बारता लगभग समान पायी गयी है। डिजिट II एवं IV के सन्दर्भ में दोनों ही हाथों में स्थिति प्रायः एक ही जैसी प्राप्त हुई है। दाँये हाथ की डिजिट III में लूप अलनर और होर्ल की स्थिति डिजिट I से ठीक विपरीत यानी लूप अलनर की बारम्बारता होर्ल से अधिक मिली है। डिजिट V में स्थिति एक जैसी नहीं है। बाँये हाथ में लूप अलनर एवं होर्ल की मान लगभग एक ही जैसी मिली है जबकि दाँये हाथ में लूप अलनर की स्थिति (63.5%) होर्ल प्रतिरूप की तुलना में बहुत ही अधिक है।

बिरहोर जनजाति में त्वचीय प्रतिरूप की बारम्बारता भी एक-दो स्थिति को छोड़कर लगभग समान है। इसमें भी दाँये हाथ की III एवं IV और बाँये हाथ की I डिजिट को छोड़कर अन्य सभी उदाहरणों में होर्ल की बारम्बारता ही अधिक पायी गयी है। संथाल में बाँये हाथ की V अंगुली में लूप अलनर एवं होर्ल की आवृत्ति लगभग समान है लेकिन बिरहोर में दाँये हाथ की स्थिति से ठीक विपरीत स्थिति पायी गयी है। दाँये हाथ में लूप अलनर एवं होर्ल की बारम्बारता क्रमशः 62.5% एवं 36.25% है। जबकि बाँये हाथ में इन्हीं दोनों प्रतिरूपों की बारम्बारता क्रमशः 32.5% एवं 63.75% मिली है। इन प्रतिरूपों के आधार पर हम पाते हैं कि बिरहोर जनजाति के ही अनुरूप लक्षण वाली प्रजातियाँ हैं।

**सारणी 2**

संथाल में होर्ल के प्रकार एवं वितरण

दाँया हाथ

| डिजिट | संकेन्द्री | दक्षिणावर्त | वामावर्त | द्विगुण कुण्डली | अन्य |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 14 | 4 | 2 | 10 | 2 |
| II | 20 | 10 | — | 2 | — |
| III | 17 | 10 | 2 | — | 3 |
| IV | 21 | 8 | 1 | 1 | 1 |
| V | 19 | 9 | 2 | — | 2 |

बाँया हाथ

| डिजिट | संकेन्द्री | दक्षिणावर्त | वामावर्त | द्विगुण कुण्डली | अन्य |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 17 | 6 | 4 | 4 | 1 |
| II | 10 | 15 | 1 | 4 | 2 |
| III | 9 | 17 | — | 3 | 3 |
| IV | 15 | 13 | 2 | — | 2 |
| V | 12 | 11 | 5 | 2 | 2 |

186 उदाहरणों में से 32 के लिए प्रिंट ऐसे मिले हैं जिनके सभी अंगुलियों में होर्ल प्रतिरूप को विभिन्न वर्गों में बाँटकर उनकी स्थिति को सारणी-2 में दर्शाया गया है। दाँये हाथ की सभी अंगुलियों में संकेन्द्री होर्ल का मान अन्य सभी मानों से अधिक है लेकिन बाँये हाथ में संकेन्द्री होर्ल प्रतिरूप की अधिक मान सिर्फ I डिजिट में ही प्राप्त हुआ है। IV एवं V डिजिटों में संकेन्द्री होर्ल और दक्षिणावर्त कुण्डली प्रतिरूप का मान लगभग बराबर पाया गया है जबकि डिजिट II एवं III में संकेन्द्री होर्ल की मान दक्षिणावर्त कुण्डली से कम है। द्विगुण कुण्डली प्रतिरूप का मान दाँये हाथ की I डिजिट में अधिक पाया गया है जबिए बाँये हाथ में इस प्रतिरूप की मान लगभग सभी अंगुलियों में एक ही जैसा है। यह प्रतिरूप दोनों ही हाथों में तीसरा स्थान प्राप्त किए हुए हैं।

दोनों हाथों की सभी अंगुलियों में लूप अलनर प्रतिरूप मिलने वाले पुरुषों की संख्या 20 है। 7 उदाहरण ऐसे मिले हैं जिनके बाँये हाथ की सभी अंगुलियों में लूप अलनर प्रतिरूप है लेकिन 5 लोगों में क्रमशः होर्ल, लूप अलनर, लूप रेडियल, होर्ल एवं लूप अलनर और बाकी 2 में होर्ल, होर्ल, लूप अलनर, लूप अलनर एवं लूप अलनर प्रतिरूप मिले हैं। 6 व्यक्तियों में I डिजिट को छोड़कर दोनों हाथ की अन्य सभी अंगुलियों में होर्ल प्रतिरूप मिला है जबकि I डिजिट में लूप अलनर प्रतिरूप है। एक व्यक्ति के दोनों हाथ में V डिजिट को छोड़कर अन्य अंगुलियों में आर्च प्रतिरूप प्राप्त हुआ है तथा V डिजिट में लूप अलनर है। एक व्यक्ति के दोनों अँगूठों में होर्ल प्रतिरूप है तथा अन्य सभी में लूप अलनर। 4 लोगों के दाहिने हाथ के अंगूठा में लूप अलनर प्रतिरूप है तो अन्य सभी में होर्ल। 4 व्यक्तियों के बाँये हाथ में होर्ल प्रतिरूप है तो उन्हीं लोगो में से दो व्यक्ति में क्रमशः होर्ल, लूप रेडियल, लूप अलनर, होर्ल एवं लूप अलनर है तथा अन्य दो में होर्ल, होर्ल, लूप अलनर, होर्ल एबं लूप अलनर प्रतिरूप है।

बिरहोर में दोनों हाथ की सभी अंगुलियों में होर्ल प्रतिरूप 19 व्यक्तियों में पाया गया है जिसका विस्तार सारणी-3 में दिखलाया गया है। इस जनजति में संकेन्द्री होर्ल प्रतिरूप का मान दोनों ही हाथों में अधिक प्राप्त हुआ है (सिर्फ दाँये हाथ की III डिजिट को छोड़कर) जबकि संथाल में इस प्रतिरूप का अधिक मान सिर्फ दाँये हाथ में ही पाया गया है। बिरहोर में संथाल के ही समान दक्षिणावर्त होर्ल का मान द्वितीय पाया गया है। बिरहोर में दक्षिणावर्त होर्ल का अधिकतम मान दाँये हाथ के III डिजिट में

है जबकि बाँये हाथ में अधिक मान V छोटी अंगुली में प्राप्त हुआ है। दाँये हाथ के III डिजिट में दक्षिणावर्त होर्ल का मान संकेन्द्री होर्ल से अधिक है लेकिन बाँये हाथ में ठीक इसके विपरीत स्थिति मिली है। दाँये हाथ में द्विगुण कुण्डली होर्ल सिर्फ I डिजिट में ही मिली है।

## सारणी 3

### बिरहोर में होर्ल के प्रकार एवं वितरण

दाँया हाथ

| डिजिट | संकेन्द्री | दक्षिणावर्त | वामावर्त | द्विगुण कुण्डली | अन्य |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 9 | 4 | 2 | 2 | 2 |
| II | 11 | 7 | 1 | — | — |
| III | 7 | 12 | — | — | — |
| IV | 13 | 5 | — | — | 1 |
| V | 10 | 6 | 1 | — | 2 |

बाँया हाथ

| डिजिट | संकेन्द्री | दक्षिणावर्त | वामावर्त | द्विगुण कुण्डली | अन्य |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 10 | 7 | 1 | 1 | — |
| II | 11 | 4 | 2 | 1 | 1 |
| III | 12 | 5 | — | — | 2 |
| IV | 9 | 6 | 1 | 1 | 2 |
| V | 10 | 8 | — | — | — |

आर्च प्रतिरूप का मान बाँये हाथ के सिर्फ I डिजिट को छोड़कर अन्य सभी अंगुलियों में अधिक है। डिजिट III, IV एवं V में यह मान दाहिने हाथ से दुगुनी अधिक है जबकि II डिजिट में दोनों ही हाथों में लगभग बराबर मान पाया गया है। I डिजिट में यह प्रतिरूप बाँये हाथ और दाहिने हाथ में 1:4 के रूप में प्राप्त हुआ है।

लूप रेडियल का मान सभी उदाहरणों में दाहिने हाथ में अधिक है।

लूप अलनर का मान डिजिट I और II ते बाँये हाथ में अधिक है जबकि डिजिट III, IV एवं V में अधिक मान दाँये हाथ में प्राप्त हुआ है।

होर्ल प्रतिरूप I और II डिजिट में दाहिने हाथ में अधिक है तथा अन्य तीनों उदाहरणों में ठीक इसके विपरीत मान प्राप्त हुए हैं।

सारणी 4

संथाल जनजाति में आर्च, लूप एवं होर्ल प्रतिरूप की बारम्बारता (% में)

| डिजिट | आर्च | | लूप रेडियल | | लूप अलनर | | होर्ल | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Rt | Lt | Rt | Lt | Rt | Lt | Rt | Lt |
| I | 4.88 | 1.22 | 1.22 | — | 30.50 | 43.90 | 56.10 | 47.50 |
| II | 8.50 | 9.76 | 8.50 | 6.10 | 32.90 | 39.9 | 48.80 | 45.10 |
| III | 3.05 | 6.10 | 3.05 | 1.83 | 54.90 | 47.03 | 39.00 | 42.60 |
| IV | 1.22 | 2.44 | — | — | 36.50 | 26.28 | 62.20 | 67.52 |
| V | — | 1.22 | — | — | 6 3 50 | 49.26 | 36.50 | 46.98 |
| औसत | 3.53 | 4.28 | 2.55 | 1.58 | 43.66 | 41.47 | 48.52 | 49.95 |
| औसत (Rt+Lt) | | 3.90 | 2.06 | | 42.56 | | 49.23 | |

सारणी 5

संथाल जनजाति में सूचकांक का मान

| डिजिट | दाँया हाथ सूचकांक | | | बाँया हाथ सूचकांक | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | P. I. | A/W | W/L | P. I. | A/W | W/L |
| I | 15.58 | 8.71 | 176.86 | 2.78 | 2.57 | 108.20 |
| II | 20.53 | 17.42 | 117.87 | 21.21 | 21.64 | 98.04 |
| III | 5.26 | 7.82 | 67.30 | 12.48 | 14.32 | 87.18 |
| IV | 3.34 | 1.96 | 170.00 | 9.28 | 3.61 | 256.92 |
| V | — | — | 57.48 | 2.47 | 2.59 | 95.31 |
| औसत | 7.64 | 7.27 | 105.00 | 9.98 | 8.56 | 116.56 |
| औसत (Rt+Lt) | P. I.=8.74, | A/W=7.92, | W/L=110.33 | | | |

तीनों प्रतिरूपों के बीच संरूप तीव्रता (पैटर्न इन्टेन्सिटी) आर्च-होर्ल एवं होर्ल-लूप सूचकांक का मान निकाला गया है। P. I. का मान डिजिट II में दोनों ही हाथों में अधिक मिला है, उसके बाद दाँये हाथ की I अंगुली में अधिक है जबकि बाँये हाथ के III डिजिट में अधिक मान प्राप्त हुआ। A/W के सन्दर्भ में भी P. I. के समान ही II डिजिट में अधिक मान प्राप्त हुआ है। ठीक उसी प्रकार दूसरा स्थान दाँये हाथ I डिजिट तथा बाँये हाथ के III डिजिट ही है। W/L उदाहरण में सबसे अधिक मान दाँये हाथ के I डिजिट (176.76) में है तो बाँये हाथ के IV डिजिट (256.92) में। दूसरे स्थान के लिए ठीक इससे विपरीत मान प्राप्त हुआ है यानी बाँये हाथ की I अंगुली और दाँये हाथ की IV अंगुली।

बिरहोर जनजाति में आर्च प्रतिरूप की बारम्बारता अधिक पायी गयी है। बाँये हाथ में दाहिने हाथ की तुलना से सभी अंगुलियों में अधिक है। संथाल में आर्च प्रतिरूप की अधिकतम बारम्बारता बाँये हाथ की II डिजिट (9.76%) में मिली है जबकि बिरहोर में इसी अंगुली में अधिकतम मान (11.25%) मिला है। संथाल में दाहिने हाथ की अंगुलियों में आर्च प्रतिरूप का मान 1.22% से 8.56% तक मिला है जबकि बिरहोर में लगभग बराबर मान पाया गया है। संथाल में बाँये हाथ की I डिजिट में 1.22% आर्च प्रतिरूप है लेकिन बिरहोर में यह प्रति 10.0%।

बिरहोर में लूप रेडियल की स्थिति संथाल जैसी ही है। लूप अलनर भी करीब-करीब संथाल के ही अनुरूप है। इस प्रतिरूप की कम से कम बारम्बारता दाँये हाथ की II डिजिट (25.0%) में और बाँये हाथ की IV डिजिट (27.5%) में मिली है। संथाल में इस प्रतिरूप का कम से कम मान दाहिने हाथ की I डिजिट में तथा बाँये हाथ की IV डिजिट में प्राप्त हुआ है।

होर्ल प्रतिरूप की दृष्टि से भी बिरहोर संथाल के ही समान है। दाँये तथा बाँये हाथ की तुलना भी लगभग संथाल की ही जैसी है। दाँये हाथ की I डिजिट में बाँये हाथ की तुलना से अधिक मान मिला है जबकि डिजिट II में दोनों हाथ में बराबर और बाकी तीनों अंगुलियों में बाँये हाथ से कम मान प्राप्त हुए हैं। संथाल में दाहिने हाथ की I और II अंगुलियों में बाँये हाथ की तुलना से अधिक मान है।

बिरहोर में सूचकांक का मान भी अधिक पाया गया है। बिरहोर के दांये हाथ में P. I. का सबसे अधिक मान I डिजिट (25.0) में मिला है जबकि संथाल में अधिकतम मान (20.53) डिजिट II में प्राप्त हुआ। बिरहोर के दाँये हाथ की I डिजिट में अधिकतम मान है लेकिन बाँये हाथ में अधिकतम मान II डिजिट (31.03) में है। A/W में दाँये हाथ की III डिजिट का स्थान प्रथम है लेकिन बाँये हाथ में प्रथम स्थान I डिजिट को मिला है जबकि संथाल में II डिजिट को ही दोनों हाथों में प्रथम स्थान प्राप्त है। W/L के सन्दर्भ में दाँये हाथ में सबसे कम मान (58.0) V डिजिट में मिला है जबकि बाँये हाथ में यह मान ~~(86.11) I डिजिट में है। दाहिने हाथ की I डिजिट में सबसे अधिक मान~~ (179.0) है लेकिन बाँये हाथ में सबसे अधिक मान (254.0) IV डिजिट में मिला है। औसत मान के

## सारणी 8

### होर्ल-लूप के अनुपात के तुलनात्मक आँकडे

| जनजाति | लिंग | I होर्ल : लूप | II होर्ल : लूप | III होर्ल : लूप | IV होर्ल : लूप | V होर्ल : लूप | स्रोत |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| मुण्डा | पु० | 55:40 | 53:31 | 37:61 | 75:24 | 27:72 | चक्रवर्ती[31] |
| ” | म० | 42:51 | 42:50 | 28:67 | 56:43 | 24:74 | ” |
| ” | पु० | 55:37 | 39:44 | 32:63 | 63:34 | 28:70 | दास शर्मा[32] |
| ” | म० | 55:37 | 48:38 | 38:56 | 65:32 | 26:27 | ” |
| उराँव | पु० | 57:39 | 61:32 | 45:53 | 85:14 | 54:44 | दास शर्मा एवं साहु[33] |
| ” | पु० | 65:32 | 52:44 | 40:58 | 76:23 | 38:62 | दास शर्मा[34] |
| दुसाध (जाति) | पु० | 48:49 | 43:48 | 29:68 | 63:37 | 23:76 | दास शर्मा[35] |
| संथाल | पु० | 52:38 | 47:43 | 40:53 | 64:31 | 41:56 | वर्तमान अध्ययन |
| बिरहोर | पु० | 48:37 | 50:34 | 40:50 | 63:45 | 50:45 | ” |

पु०=पुरुष, म०=महिला

सारणी-8 में होर्ल और लूप के अनुपात को मुण्डा, उराँव (अनुसूचित जनजाति) एवं दुसाध (अनुसूचित जाति) के साथ तुलना की गई है। मुण्डा पुरुष के I डिजिट में होर्ल एवं लूप का अनुपात लगभग एकसमान पाया गया है लेकिन इन्हीं जगहों के महिलाओं में इन प्रतिरूपों के अनुपात में काफी अन्तर पाया गया है। उराँव पुरुष में यह अन्तर और अधिक है (65:32)। वर्तमान अध्ययन मुण्डा और दुसाध के करीब है तथा उराँव से काफी कम अनुपात प्राप्त हुआ है। II डिजिट के उदाहरण में मुण्डा पुरुषों के बीच भारी अन्तर है जबकि महिलाओं में पुरुषों की तुलना से अधिक समानता मिली है। इस स्थिति से भी उराँव ही अन्य सभी से अलग मान दर्शाती है। संथाल तथा बिरहोर में मुण्डा के ही समान अनुपात पाया गया है। I और II डिजिट में (मुण्डा पुरुष को छोड़कर) होर्ल का अनुपात लूप की तुलना में अधिक है जबकि III डिजिट में लूप का अनुपात सभी उदाहरणों में अधिक है। IV डिजिट में पुनः I और II डिजिट के अनुरूप होर्ल और लूप का अनुपात पाया गया है। इस उदाहरण में होर्ल का मान अन्य सभी अंगुलियों में प्राप्त मान से अधिक है। मुण्डा पुरुषों में इनका अनुपात करीब-करीब एक ही जैसा

है लेकिन महिलाओं में होर्ल और लूप के अनुपात में काफी अन्तर पाया गया है (56:43, 65:32)। उराँव में दोनों ही प्रतिरूपोंका अनुपात 85:14 पाया गया है। इस उदाहरण में भी संथाल तथा बिरहोर मुण्डा के समरूप है। डिजिट V में भी डिजिट III के ही समान अनुपात देखने को मिलता है। इसमें होर्ल की स्थिति III डिजिट से भी कम है। सिर्फ उराँव पुरुष में होर्ल का अनुपात अधिक है। इस सन्दर्भ में संथाल तथा बिरहोर मुण्डा से भिन्न है तथा उराँव से मिल रहा है। विभिन्न स्थानों के उराँव में भी एक समान प्रतिरूपों का अनुपात पाया गया है। अत: इस सारणी से यह स्पष्ट पता चलता है कि होर्ल और लूप अनुपात का वितरण बहुत ही सामान्य है जबकि आर्च, लूप और होर्ल प्रतिरूप का अध्ययन प्रत्येक डिजिट के सन्दर्भ में करते हैं तो इस प्रकार का सामान्य वितरण नहीं मिलता है। प्रत्येक व्यक्ति के कुल आर्च, लूप एवं होर्ल प्रतिरूप की बारम्बारता की तुलना में यह सम्भव है कि इसमें जेनेटिक लक्षण है तथा प्रत्येक अंगुली में पायी जाने वाली प्रतिरूप में जेनेटिक आधार है। सूचकांकों का मान भी आर्च-लूप-होर्ल की बारम्बारता के ही समान है।

बिहार की विभिन्न जनजातियों एवं कुछ जाति पर किये गये कार्यों में आर्च, लूप एवं होर्ल प्रतिरूपों की बारम्बारता को दर्शाये गये आँकड़ों पर भी विचार किया गया है। असुर, बिरहोर, मुण्डा, पहिरा एवं संथाल जनजाति आष्ट्रिक भाषा परिवार के अन्तर्गत आते हैं तथा उराँव और मालेर द्रविड़ भाषा को बोलने वाली जनजाति है। परन्तु यहाँ पर आष्ट्रिक भाषा का सम्बन्ध त्वचीय प्रतिरूप से नहीं मिल रहा है। आष्ट्रिक परिवार के विभिन्न समूहों के बीच समान लक्षण नहीं पाया गया है। इसके साथ ही साथ नजदीकी लक्षणों का भी अभाव पाया गया है। द्रविड़ भाषा के सदस्य उराँव और मालेर के बीच भाषा के साथ-साथ त्वचीय प्रतिरूप की भी समानता मिली है। अत: एक ही भाषा-परिवार की जनजातियों में विभिन्न मान का प्राप्त होना हेटेरोजिनेटी या इंडोगेमी दर, विभिन्न समुदायों में वरण की प्रकृति की क्रियाशीलता, सेम्पुल साइज आदि के कारण हो सकता है।

सरकार[36] ने इंगित किया है कि भारतीय ऑस्ट्रेलवाइड लोगों में जिसके अन्तर्गत छोटा नागपुर (बिहार) की जनजाति आती हैं 60:40 होर्ल-लूप अनुपात की प्रधानता है। उराँव में किये गये कार्यों (मुखर्जी एवं अन्य[37], घोष[38], दास शर्मा[39] में होर्ल-लूप अनुपात 60:40 पाया गया है. लेकिन इसी प्रकार का अनुपात मालेर जनजाति में नहीं मिला है। इसी प्रकार आष्ट्रिक भाषा के जनजातियों में होर्ल लूप के बीच 60:40 का अनुपात नहीं मिला है जबकि सरकार[40] के अनुसार इसी अनुपात में होर्ल और लूप को प्राप्त होना चाहिए। अत: प्राप्त किये गये सभी मान विरोधाभासी प्रतीत होता है। सूचकांक होर्ल, लूप एवं आर्च प्रतिरूप की कुल बारम्बारता पर निर्भर करता है परन्तु सूचकांक के मान में भी कोई स्पष्ट तथ्य नहीं प्रकट होता है।

चक्रवर्ती[40] ने डरमेटोग्लायफिक्स अध्ययन के क्रम में बिहार के मुण्डा पुरुषों में होर्ल और लूप प्रतिरूप की लगभग समान प्रतिशत (होर्ल=49.65% एवं लूप=48.38%) पाया। चक्रवर्ती[41] ने संथाल का भी अध्ययन किया और पाया कि संथाल जनजाति अधिकांशत: मुण्डा के समान ही त्वचीय प्रतिरूप वाली जनजाति है। मुण्डा पुरुष एवं संथाल महिला में होर्ल और लूप का अनुपात लगभग समान

हैं जबकि संथाल पुरुष में होर्ल का मान अधिक पाया गया है । पैटर्न इंटेन्सिटी सूचकांक के सन्दर्भ में भी संथाल और मुण्डा एक दूसरे के समान है । इसी प्रकार का पैटर्न इंटेन्सिटी सूचकांक भोटिया (तिवारी[42]), रामा और हिल गारो (दास[43]) में पाया गया है । उन्होंने निष्कर्ष निकाला कि इन समूहों में समान लक्षण होने के लिए शायद मंगोलवाइड रेसियल स्ट्रेन जिम्मेवार है ।

रीफ[44] के द्वारा तैयार की गई डरमेटोग्लायफिक्स के विश्व मानचित्र से यह पता चलता है कि आस्ट्रेलियन एवोरोजिन्स, ग्रीनलैंड और अलास्कन एस्किमो में होर्ल की संख्या 60% से भी अधिक होती है जिसमें पैटर्न इंटेन्सिटी 15.5 से 18 होती है । लूप 40% से कम होती है तथा आर्च 1% से अधिक नहीं होती है । उनके पड़ोसी सुदूर पूर्व एवं उत्तरी अमेरिका के मंगोलियन में होर्ल 50 से 55% (पैटर्न इन्टेन्सिटी 14.2 से 15.5) होती है । दुनिया के मध्य भाग में होर्ल 35 से 40% (पैटर्न इन्टेन्सिटी 12.5 से 14.2) होती है । उत्तरी यूरोप, दक्षिणी अमरिका और केन्द्रीय अफ्रीका में होर्ल 30% (पैटर्न इन्टेन्सिटी 12 से 13.5) पायी जाती है । उत्तरी-पश्चिमी अफ्रीका एवं दक्षिणी-पश्चिमी अफ्रीका में होर्ल 20% (पैटर्न इन्टेन्सिटी 10 से 12) होती है । दक्षिणी-पूर्वी अफ्रीका के पिग्मी में होर्ल सिर्फ 15% (पैटर्न इन्टेन्सिटी 10 से नीचे) के लगभग होती है ।

लूप एवं आर्च की संख्या सुदूरपूर्व और उत्तरी अमरिका के पश्चिमी तटीय भाग में कम है । इसका क्रमिक विकास का उत्तरी एवं पश्चिमी यूरेशिया और अफ्रीका एवं अमरिका के दक्षिणी भागों में पाया जाता है । इनकी अधिकतम संख्या दक्षिणी अफ्रीका एवं उत्तरी-पूर्वी यूरोप में पायी गयी है ।

जापान का आयनु कॉकेस्वाइड प्रजाति के लोग है जिसमें अभी तक होर्ल की संख्या कम मिलती है । वातावरण का प्रभाव हर समय नहीं होता है क्योंकि बहुत से प्रिन्ट ऐसे मिले हैं जिनमें हर समय एकरूपता नहीं पायी गयी है । मानव की पूर्वी-एशियन उत्पत्ति सिद्धान्त में ऐसा माना गया था कि होर्ल प्रतिरूप का वितरण सबसे प्राचीन प्रतिरूप है परन्तु आदिम जनजाति आस्ट्रेलियन और अफ्रीकन पिग्मी में आर्च एवं लूप की प्रमुखता पायी गयी है । इससे यह स्पष्ट होता है कि मानव की उत्पत्ति की बहुविध परिकल्पना (एक एशिया में और दूसरी अफ्रीका में) उपयुक्त नहीं है लेकिन यह स्वीकारा जा रहा है कि मानव प्रजाति पूर्वी-एशिया से अन्य भागों में फैले । दक्षिणी अफ्रीका और उत्तरी यूरोप में अत्यधिक विभिन्नता पायी जाती है । जर्मनी अध्ययनों से स्पष्ट पता चलता है कि होर्ल प्रतिरूप की क्रमिक कमी उत्तर की ओर है ।

चक्रवर्ती[45] ने अपने अध्ययन के क्रम में होर्ल और लूप के अनुपात को 7 स्तरों में बाँटा है और पाया है कि होर्ल प्रतिरूप का क्रमिक विकास दक्षिण तथा पूरब की ओर है जबकि लूप की स्थिति होर्ल के ठीक विपरीत है । भारतीयों के प्रजाति वर्गीकरण में कुछ विरोधी तथ्य प्राप्त हुए हैं । दक्षिण तथा मध्य क्षेत्र के जंगलों में रहने वाले लोगों को अति नाटा और फिजी बाल होने के कारण निग्रो कहा गया है । अंडमानियों में होर्ल प्रतिरूप 23% तथा 76% प्राप्त हुई है । आर्च प्रतिरूप की कमी पायी जाने के कारण ये लोग अफ्रीकन पिग्मी से भिन्न हैं और नई प्रजाति एसिएटिक निग्रो के सिद्धान्त को दर्शाते हैं । परन्तु केरल के कादर जनजाति (चक्रवर्ती[46]) जिन्हें गुहा एवं अन्य ने निग्रो कहा है, में होर्ल

और लूप का अनुपात 60:40 पाया गया है। यह जनजाति प्रोटो आस्ट्रेल्वाइड या प्राकद्रविड़ के समान है। भारत के मंगोलियन मानचित्र पर नजर डालने से होर्ल और लूप प्रतिरूप का अनुपात 50:50 पाया जाता है जिसमें किसी भी प्रकार का विरोधाभास नहीं है। कुछ में तो यह अनुपात 55:45 पाया गया है जो सम्भवतः दक्षिणी-पूर्वी आस्टेल्वाइड के समरूप है तथा पूर्वी सीमान्त के कुछ समूहों में यह अनुपात 45:55 है जो उत्तरी भारतीय लोगों के समान है। सरकार[47] ने छोटा नागपुर के मुण्डारी भाषा-भाषी लोगों में होर्ल की बारम्बारता 40% पायी है। वर्तमान अध्ययन से यह पता चलता है कि संथाल तथा बिरहोर मुण्डा से मिलते-जुलते त्वचीय प्रतिरूप वाले जनजाति है तथा अधिकांशतः उराँव से भिन्न हैं।

**निष्कर्ष**

वर्तमान लेख में संथाल तथा बिरहोर जनजाति में अंगुली के त्वचीय प्रतिरूपों का वर्णन किया गया है तथा उनकी बारम्बारता और सूचकांकों का तुलनात्मक अध्ययन भी किया गया है। अध्ययन के क्रम से यह पाया गया कि दोनों ही जनजातियों में होर्ल प्रतिरूप की बारम्बारता अधिक है। संथाल जनजाति में 186 उदाहरणों में से 32 तथा बिरहोर में 80 में से 19 उदाहरण में ऐसे मिले हैं जिनके सभी अंगुलियों में होर्ल प्रतिरूप ही है और संकेन्द्री होर्ल अन्य सभी प्रकार के होर्ल से अधिक है। त्वचीय प्रतिरूप की बारम्बारता एवं सूचकांकों में कोई निश्चित प्रवृत्ति नहीं मिली है इसलिए कोई ठोस निष्कर्ष निकालने में कठिनाई प्रतीत हो रही है। परन्तु डिजिट के अनुसार त्वचीय प्रतिरूप की बारम्बारता तथा होर्ल-लूप अनुपात पर दृष्टि डालने से निश्चित रूप से कुछ महत्वपूर्ण तथ्य प्राप्त होते हैं।

(i) संथाल जनजाति के दोनों हाथ की I, II एवं IV डिजिट में होर्ल का मान लूप अलनर से अधिक है लेकिन बिरहोर के बाँये हाथ में होर्ल का अधिक मान II, IV एवं V डिजिट में है।

(ii) दोनों ही जनजाति के डिजिट I एवं IV में लगभग समान रूप से होर्ल और लूप अनुपात पाया गया है जिसमें लूप की तुलना में होर्ल का मान अधिक है।

(iii) बिरहोर के V डिजिट को छोड़कर दोनों में III एवं V डिजिट में लूप का मान अधिक पाया गया है।

(iv) कुछ उदाहरणों में त्वचीय प्रतिरूप में विभिन्न मान प्राप्त हुआ है। यह सम्भवतः आनुवंशिक कारकों के उत्तरदायित्व का ही परिणाम हो सकता है।

**निर्देश**

1. गाल्टन, एफ०, **फिंगर प्रिंट**, 1892, लंदन

2. रिपुदमन, **शारी० मानव वि०**, 1974, 393

3. चटर्जी, एम० के०, **फिंगर प्रिंट तथा आइडे०**, 1959, **41**, 3-7 एवं 12-14

4. सिंह, पी०, **फिंगर प्रिंट एवं आइडे०**, 1960, 41, 11-15

5. वही, **फिंगर प्रिंट एवं आइडे०**, 1962, **43**, 3-7, एवं 16-17

6. कल्याणसुन्दरम्, जी०, **फिंगर प्रिंट एवं आइडें०**, 1960, **42**, **6-7** एवं **11-12**

7. मैक आर्थर, जे० डब्ल्यू०, **ह्यूमेन बायो०**, 1938, **10**, 12-35

8. ह्वीपलर, आई० एल०, **जेड० मोर० एन्थ्रो०**, 1904, **7**, 261-268

9. पिकुज, एफ०, **हैन्ड० डर० है० जैस०**, 1927, **1**, 1-387

10. प्लोट्ज-रदमन, एम०, **जेड० मोर० एन्थ्रो०**, 1937, **36**, 281-310

11. किंग, डब्ल्यू० डब्ल्यू०, **जेड० मोर० एन्थ्रो०**, 1939, **38**, 409-342

12. कमिन्स, एम० तथा चिडलो, सी०, **द ब्लेकि० क० फेलाडेलफिया**, 1943

13. कमिन्स, एच० तथा स्प्रेग, एस० डी० एच०, **ह्यूमे० बायो०**, 1938, **10**, 457-510

14. वर्मा, बी० बी०, **मैन इन इंडिया**, 1952, **32**, 134-143

15. मुखर्जी, डी० पी० तथा चक्रवर्ती, एम० आर०, **मोरफो० एन्थ्रो०**, 1964, **55**, 32-45

16. चक्रवर्ती, एम० आर०० **बुले० वि० ट्रा० रि० ई०**, 1965, 143-167

17. दास शर्मा, पी०, **ई० एन० सो०**, 1974, **11**, 121-126

18. दास शर्मा, पी० तथा साहु, बी०, **नियोन**, 1973, **81**, 260-267

19. शुक्ला, बी० आर० के० तथा त्यागी, डी०, **ई० ज० फि० एन्थ्रो० ह्यू० जे०**, 1975, **1**, 59-65

20. दास शर्मा, पी०, **मैन इन इंडिया**, 1977, **57**, 4

21. साहु, चतुर्भुज, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1991, **34**, 3, 107-114

22. वही, 1992, **35**, 2, 123-134

23. वही, 1992, **35**, 4, 235-252

24. गुप्ता, पी० तथा अन्य, **मैन इन इंडिया** 1970, **50**, 135-140

25. विश्वास, पी० सी०, **संथाल ऑफ संथा० पर०** 1956, दिल्ली

26. वही, **वर्मा**, 1952 से उद्धृत

27. साहु, चतुर्भुज, क्रम० सं० 22 जैसा

28. साहु, चतुर्भुज, क्रम० सं० 23 जैसा

29. छटन, जे० एच०, मैन ऑफ इन्डिया, 1931, रिपोर्ट-1

30. क्रम संख्या 12 जैसा

32. दास शर्मा, पी०, अप्रकाशित, 1972

33. क्रम संख्या 18 जैसा

34. दास शर्मा, पी०, अप्रकाशित, 1973

35. दास शर्मा, पी०, "जर० नो० रिस०," 1978, 21, 2, 148-167

36. सरकार. एस० एस०, "दि एवो० रेस० इंडि०," कलकत्ता, 1954

37. मुखर्जी, डी० पी० तथा चक्रवर्ती, एम० आर०, "जेड० मोरफ० एन्थ्रो," 1964,55,32-45

38. घोष, जी० सी०, द० एस० सी० राय सेन्टे० सिले० सोमि०, 1971, 10

39. दास शर्मा, पी०, क्रम संख्या 34 जैसा

40. चक्रवर्ती, एम० आर०, क्रम संख्या 16 जैसा

41. वही, मैन इन इन्डिया, 1955, 35, 316-317

42. तिवारी, एस० सी०, मैन इन इन्डिया, 1952, 32, 1-13

43. दास, एस० आर०, अन्न ह्यू मे० जेने०, 1958, 22, 202-212

44. रीफ, जे० सी०, "अमे० जर० ऑफ ह्ये० जेने०," 1953, 5, 389

45. चक्रवर्ती, एम० आर०, "सम० आस० ऑफ फिज० एन्थ्रो०," 1963, 55-70

46. वही, "मेमो० न० 6 मान० वि० वि०," भारत सरकार, 1959

47. सरकार, एस० एस० क्रम संख्या 36 जैसा

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 1, 1994

# गेहूँ की विभिन्न प्रजातियों पर नाइट्रोजन स्तरों का अध्ययन

धर्म वीर सिंह तथा बनारसी यादव
संभागीय कृषि परीक्षण एवं प्रदर्शन केन्द्र झाँसी

[ प्राप्त—जनवरी 3, 1992 ]

## सारांश

प्रस्तुत शोध में गेहूँ की छः विभिन्न प्रजातियों पर नाइट्रोजन के विभिन्न स्तरों के प्रभाव का अध्ययन किया गया है। बीजोत्पादन एवं उसके विभिन्न कारकों का सांख्यिकीय संगणन किया गया। नाइट्रोजन का प्रभाव प्रजाति एवं मात्रा विशिष्ट पाया गया। बीजोत्पादन में बढ़ोत्तरी मुख्यत: बाल की लम्बाई, प्रति बाल दानों की संख्या एवं 100-बीज भार में बढ़ोत्तरी के कारण हुई। नाइट्रोजन के प्रयोग से 100-बीज भार में 41.9 (एच॰ डी॰ 2285) से 82.8 (मालवी 234) प्रतिशत बढ़ोत्तरी पायी गयी, जबकि बड़े दानों वाली (एच॰ डी॰ 2285) प्रजाति छोटे दानों वाली प्रजातियों की तुलना में नाइट्रोजन प्रयोग से कम प्रभावी पायी गयी। प्रयोग से प्राप्त परिणाम यह दर्शाते हैं कि नाइट्रोजन के प्रयोग से गेहूँ के बीजोत्पादन में प्रजाति एवं मात्रा विशिष्ट बढ़ोत्तरी सम्भव है।

## Abstract

**Study of nitrogen doses on different cultivars of wheat (triticum aesivum L.).** *By* D. V. Singh and B. Yadav, Regional Agricultural Testing and Demonstration Station, Jhansi.

Present investigation was undertaken with a view to study the response of different doses of nitrogen on six different genotypes of Wheat (*Triticum Aestivum* L.). Data on yield and yield attributing traits were recorded and statistically analysed. The response of nitrogen was observed to be genotype and dose specific. Improvement in seed yield was observed due to the improvement in ear length, number of seeds per ear and 100-seeds weight. Nitrogen application increased 100-seed weight by 41.9 (H. D. —2285) to 82.1 (Malviya 234) precent. However, big seeded cultivar (H. D. —2285) responded poorly as compared to small seeded

cultivars towards nitrogen application. The result demonstrated the existence of cultivar and dose specific yield improvement through nitrogen application.

प्राय: यह पाया गया है कि अर्धशुष्क जलवायु में नाइट्रोजन का प्रयोग बहुत ही कम मात्रा में किया जाता है। इसके अतिरिक्त विनाइट्रीकरण, च्यावन अन्यान्य एवं कारणोंसे प्रयोग किये गये नाइट्रोजन की पूरी मात्रा पौधों को नहीं मिल पाती है।[1,2,3] उर्वरकों के अधिक मूल्य एवं पौधों द्वारा उपयोग की गयी नाइट्रोजन की मात्रा से उत्पन्न पर्यावरणीय प्रदूषण विशेष महत्व रखता है[3] फसलोत्पादन को प्राय: आनुवंशिकी [8,9] एवं फसलोत्पादन के मुख्य अवयव जिनमें नाइट्रोजन मुख्य है[10,11,12,13] काफी प्रभावित करता है। उपरोक्त तथ्यों को ध्यान में रखते हुए यह आवश्यक हो जाता है कि प्रजातिवार नाइट्रोजन की उचित मात्रा का अध्ययन किया जाय तथा उचित मात्रा का ही प्रयोग किया जाय ताकि प्रदूषण पर नियन्त्रण करते हुए एवं कम से कम उर्वरक प्रयोग करके अधिक उत्पादन लिया जा सके। अत: प्रस्तुत शोध में गेहूँ की विभिन्न प्रजातियों पर विभिन्न नाइट्रोजन स्तर की उपयोगिता का अध्ययन किया गया।

## प्रयोगात्मक

प्रयोगात्मक अध्ययन हेतु गेहूँ की छ: (एच० डी० 2284, मालवी 206, एच० डी० 2329, पी० वी० डब्ल्यू० 154, डब्ल्यू० एच० 542 एवं मालवी 2341 प्रजातियों को सम्भागीय कृषि परीक्षण एवं प्रदर्शन प्रक्षेत्र भरारी (झाँसी) पर स्प्लिट प्लाट डिजाइन को तीन प्रतिवलन में उगाया गया। अध्ययन के उद्देश्य से सभी प्रजातियों पर चार, 40, 80, 120 तथा 160 किलोग्राम नाइट्रोजन प्रति हैक्टेयर (N. 40, N. 80, N. 120 तथा N. 160) का प्रयोग किया गया। प्रत्येक प्रजाति को बिना नाइट्रोजन (N. 0) के प्रयोग के भी सभी प्रयोगों के साथ लगाया गया। आपस में पंक्तियों की दूरी 20 सेन्टीमीटर रखी गयी। अच्छी फसल उगाने हेतु सभी आवश्यक सस्य क्रियायें की गयीं। फसल के पकने पर प्रत्येक प्रतिवलन से प्रति उपचार बीजोत्पादन एवं उसके मुख्य कारकों पर आँकड़े लिये गये। बीजोत्पादन एवं मुख्य कारकों पर लिए गये आँकड़ों का संगणन नेकेडर तथा कोचरान[16] के सूत्र द्वारा किया गया।

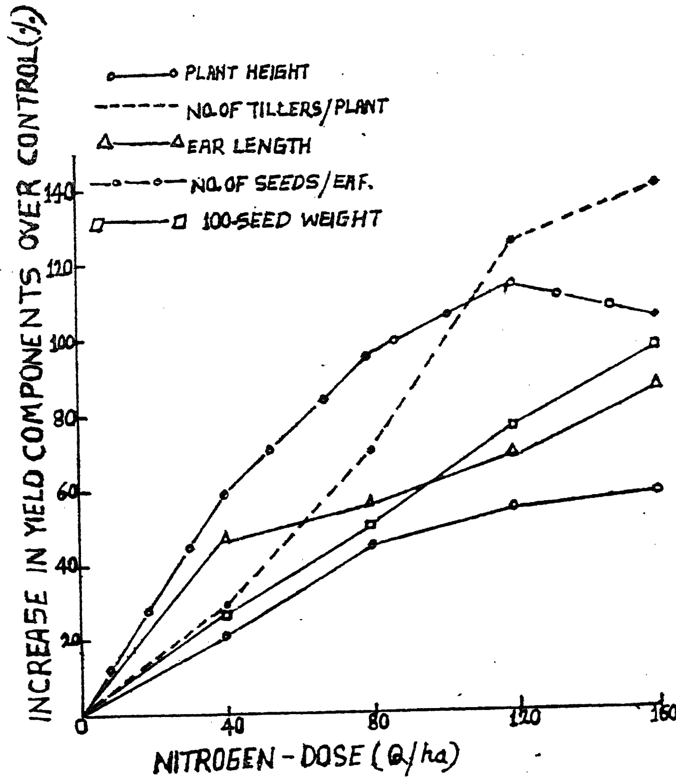
## परिणाम तथा विवेचना

प्रयोग से प्राप्त परिणाम यह दर्शाता है कि नाइट्रोजन का प्रभाव प्रजाति विशिष्ट है। बड़े दानों वाली प्रजाति में नाइट्रोजन प्रयोग का बीज आकार पर सबसे कम प्रभाव पाया गया। सारणी-1 रसायनों के प्रति प्रजाति विशिष्ट होने के गुण की पुष्टि इससे पूर्व भी की जा चुकी है [4,5]।

### विभिन्न नाइट्रोजन स्तर का प्रभाव

परिणाम से स्पष्ट है कि नाइट्रोजन के विभिन्न स्तरों का प्रभाव अलग-अलग है। नाइट्रोजन की मात्रा बढ़ाने के साथ प्राय: बीजोत्पादन के सभी मुख्य कारकों में बढ़ोत्तरी पायी गयी, परन्तु अधिकतम नाइट्रोजन स्तर पर प्रजाति एच० डी० 2329 को छोड़ कर सभी प्रजातियों में प्रति बाल दानों की

संख्या में कमी आयी है (सारणी 1, 2 तथा चित्र 1)। सम्भवत: प्रति बाल दानों की संख्या में यह कमी अधिक मात्रा में नाइट्रोजन प्रयोग का कुप्रभाव है।[6] प्राय: सभी प्रजातियों में 160 किलोग्राम नाइट्रोजन प्रति हैक्टेयर (N. 160) पर अधिकतम बीजोत्पादन पाया गया। प्रजातियों में मालवी 206 तथा डब्ल्यू० एच० 542 सबसे कम एवं मालवीय 234 अधिकतम नाइट्रोजन स्तर के प्रति ज्यादा प्रभावी रही (सारणी 1)।




चित्र 1

**विभिन्न प्रजातियों पर नाइट्रोजन का औसत प्रभाव**

प्रयोग से प्राप्त परिणाम से यह पूर्णत: स्पष्ट है कि नाइट्रोजन का प्रयोग प्रजाति विशिष्ट है। (सारणी 3)[7]। बड़े दाने वाली प्रजाति (एच० डी० 2285) में बीजों का आकार में सबसे कम 41.9 प्रतिशत बढ़ोत्तरी पायी गयी, जबकि छोटे आकार के बीजों में 44.8 (मालवी-206) से 82.8 (मालवी-234) प्रतिशत की बढ़ोत्तरी पायी गयी।

सारणी 1

प्रजातिवार नाइट्रोजन के विभिन्न स्तरों का प्रभाव

| प्रजाति | प्रति बाल दानों की संख्या | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $N_0$ | $N_{40}$ | $N_{80}$ | $N_{120}$ | $N_{160}$ |
| एच० डी०-2285 | 19.3 | 29.3 | 42.0 | 44.3 | 43.0 |
| मालवी-206 | 23.0 | 35.0 | 30.0 | 42.0 | 36.6 |
| एच० डी०-2329 | 18.0 | 32.3 | 40.0 | 41.0 | 43.0 |
| पी० वी० डब्लू०-154 | 19.3 | 33.3 | 39.3 | 43.6 | 42.6 |
| डब्लू० ए०-542 | 17.6 | 30.6 | 38.3 | 45.3 | 43.6 |
| मालवी-234 | 24.6 | 33.0 | 30.6 | 45.0 | 42.0 |
| प्रजाति | 100 बीज भार (ग्राम) | | | | |
| | $N_0$ | $N_{40}$ | $N_{80}$ | $N_{120}$ | $N_{160}$ |
| एच० डी०-2285 | 3.1 | 3.82 | 4.16 | 4.84 | 4.9 |
| मालवी-206 | 2.95 | 3.56 | 3.93 | 4.46 | 4.75 |
| एच० डी०-2329 | 2.85 | 3.80 | 4.60 | 4.85 | 6.90 |
| पी० वी० डब्लू०-154 | 3.10 | 3.86 | 4.91 | 6.18 | 6.50 |
| डब्लू० ए०-542 | 2.20 | 2.57 | 3.20 | 3.90 | 4.13 |
| मालवी-234 | 2.85 | 3.90 | 4.78 | 5.90 | 6.47 |
| प्रजाति | बीजोत्पादन कु० प्रति हैक्टेयर | | | | |
| | $N_0$ | $N_{10}$ | $N_{80}$ | $N_{120}$ | $N_{160}$ |
| एच० डी०-2285 | 9.62 | 15.38 | 20.2 | 30.55 | 34.8 |
| मालवी-206 | 9.08 | 12.02 | 19·54 | 23.07 | 28.52 |
| एच० डी०-2329 | 7.04 | 14.00 | 21.78 | 24·52 | 33.01 |
| पी० वी० डब्लू०-154 | 8.65 | 14.23 | 24.10 | 30.44 | 31.28 |
| डब्लू० ए०-542 | 7.36 | 8.80 | 13.84 | 20.80 | 23.39 |
| मालवी-234 | 8.15 | 16.33 | 21.66 | 24.04 | 33.01 |

$N_0$, $N_{40}$, $N_{60}$, $N_{120}$, $N_{160}$=किलोग्राम नाइट्रोजन

## सारणी 2

विभिन्न नाइट्रोजन स्तर का गेहूँ की प्राजतियों पर औसत प्रभाव*

| कारक | 0 नाइट्रोजन ($N_0$) | 40 नाइट्रोजन स्तर ($N_{40}$) | 80 नाइट्रोजन स्तर ($N_{80}$) | 120 नाइट्रोजन स्तर ($N_{120}$) | 160 नाइट्रोजन स्तर ($N_{160}$) |
|---|---|---|---|---|---|
| पौध की लम्बाई (से०मी०) | 49.9 | 60.8 (21.84) | 71.9 (44.09) | 77.1 (54.50) | 79.1 (58.52) |
| प्रति पौध ब्यात | 1.35 | 1.75(29.63) | 2.3 (70.37) | 3.03(24.40) | 3.25(140.74) |
| बाल की लम्बाई (से०मी) | 4.56 | 6.7 (46.93) | 7.08(55.26) | 7.73(69.52) | 8.5 (86.40) |
| प्रति बाल दानों की संख्या | 20.3 | 32.25(58.87) | 39.65(95.32) | 43.5(114.28) | 41.8(105.91) |
| 100-बीज भार (ग्राम) | 2.84 | 3.59(26.41) | 4.26(50.0) | 5.02(76.76) | 5.61(97.54) |
| बीजोत्पादन कु० प्रति है० | 8.32 | 13.46(61.78) | 20.20(142.79) | 25.57(207.33) | 30.66(268.51) |

* कोष्टक में दिया गया मान शून्य नाइट्रोजन स्तर ($N_0$) के सापेक्ष विभिन्न नाइट्रोजन स्तरों पर बढ़ोत्तरी दर्शाता है ।

## सारणी 3

गेहूँ की विभिन्न प्रजातियों पर नाइट्रोजन प्रयोग का औसत प्रभाव

| प्रजाति | बिना नाइट्रोजन प्रयोग के | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | पौध की लम्बाई (से०मी०) | प्रति पौध व्यात | बाल की लम्बाई (से०मी०) | प्रति बाल दानों की संख्या | 100 बीज भार |
| एच० डी०-2285 | 53.6 | 1.3 | 3.6 | 19.3 | 3.1 |
| मालवी-206 | 52.0 | 1.3 | 4.3 | 23.0 | 2.9 |
| एच० डी० 2329 | 45.0 | 1.6 | 4.6 | 18.0 | 2.8 |
| पी० वी० डब्लू०-154 | 54.0 | 1.3 | 5.3 | 19.3 | 3.1 |
| डब्लू० एच०-542 | 41.6 | 1.3 | 4.6 | 17.6 | 2.2 |
| मालवी-234 | 53.3 | 1.3 | 5.0 | 24.6 | 2.9 |
| **प्रजाति** | **नाइट्रोजन प्रयोग का औसत प्रभाव*** | | | | |
| | पौध की लम्बाई (से०मी०) | प्रति पौध व्यात | बाल की लम्बाई (से०मी०) | प्रति बाल दानों की संख्या | 100 बीज भार (ग्राम में) |
| एच० डी०-2285 | 73.4(36.34) | 2.5(92.3) | 7.7(113.9) | 39.6(105.2) | 4.4(41.9) |
| मालवी-206 | 77.9(49.8) | 2.4(84.6) | 7.6 (76.7) | 38.2 (66.1) | 4.2(44.8) |
| एच० डी०-2329 | 72.1(60.2) | 2.7(68.7) | 7.5 (63.0) | 39.1(117.2) | 5.1(82.1) |
| पी० वी० डब्लू०-154 | 68.8(27.4) | 2.6(100) | 7.3 (37.7) | 39.7(105.7) | 5.4(74.2) |
| डब्लू० एच०-542 | 65.4(57.2) | 2.4(84.6) | 7.2 (56.5) | 39.5(124.4) | 3.5(59.1) |
| मालवी 234 | 75.4(41.4) | 2.7(107.7) | 7.5 (50.0) | 39.9 (62.2) | 5.3(82.8) |

* कोष्टक में दिया गया मान विभिन्न प्रजातियों पर शून्य नाइट्रोजन स्तर पर ($N_0$) नाइट्रोजन प्रयोग (औसत) पर बढ़ोत्तरी दर्शाता है।

फसलों में बीजोत्पादन प्रायः आनुवंशिकी[6,7,8,9] के साथ-साथ फसलोत्पादन के मुख्य अवयवों (मुख्य रूप से नाइट्रोजन)[11,12,13]को काफी प्रभावित करता है। प्रयोग से प्राप्त परिणाम से स्पष्ट है कि गेहूँ की प्रजातियाँ नाइट्रोजन के प्रति मात्रा विशिष्ट हैं तथा अधिकतम नाइट्रोजन स्तर पर प्रति बाल दानों में आयी कमी यह दर्शाती है कि उचित मात्रा का प्रयोग ही अधिकतम लाभ प्रदान कर सकने में सक्षम है।[6]

प्राप्त परिणामों से यह भी स्पष्ट है कि नाइट्रोजन का प्रभाव प्रजाति विशिष्ट है। प्रत्येक प्रजाति की आनुवंशिक स्तर में कुछ भिन्नता होती है जो कि उसकी रसायनों के प्रति अलग-अलग ग्राह्यता निर्धारण करती है।[14] बड़े दानों वाली प्रजाति पर नाइट्रोजन के प्रयोग से 100 बीज भार में सबसे कम बढ़ोत्तरी यह दर्शाती है कि किसी भी अवयव में सुधार की एक निश्चित सीमा होती है जिससे उसमें अधिक बढ़ोत्तरी असम्भव नहीं तो दुरूह अवश्य है।[15] बीजोत्पादन में हुई वृद्धि बीजोत्पादन के विभिन्न कारकों में हुई वृद्धि का परिणाम है।

प्रस्तुत अध्ययन में गेहूँ की विभिन्न प्रजातियों पर नाइट्रोजन की अलग-अलग मात्राओं के प्रयोग से यह निष्कर्ष निकलता है कि नाइट्रोजन के उचित मात्रा का प्रयोग करके गेहूँ की पैदावार में वृद्धि सम्भव है। यदि उचित नाइट्रोजन की मात्रा का प्रयोग करके प्रति पौध ब्यातों की संख्या तथा प्रति बाल दानों की संख्या में सुधार लाया जा सके तो गेहूँ उत्पादन में यह काफी महत्वपूर्ण उपलब्धि होगी।


## कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण फसलों के उचित रखरखाव तथा समय पर आवश्यक सुविधायें प्रदान करने हेतु प्रक्षेत्र अधीक्षक एवं सभी शोध सहायक सम्भागीय कृषि परीणण एवं प्रदर्शन प्रक्षेत्र भरारी (झाँसी) के आभारी हैं।


## निर्देश


1. विलर, जे० तथा डेलविक, सी० सी०, **प्लान्ट एण्ड स्वाइल** 1954, **5**, 1-18
2. प्रसाद आर०, **फर्टिलाइजर न्यूज**, 1966, **11**, 27-32
3. मनोरमा थम्पत्ती के० सी० तथा पद्मजा, पी०, **जर्नल आफ पोटेशियम रिसर्च**, 1992, 8(3), 200-209
4. बनारसी यादव, हृदय कुमार तथा प्रमोद कुमार चौबे, **विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका**, 1991, **34**, 155-160
5. फणीन्द्र सिंह तथा बनारसी यादव, **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका**, 1992, **35**, 151-158
6. बनारसी यादव, राम प्रताप सिह, राघवेन्द्र सिंह तथा भानु प्रकाश श्रीवास्तव, **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका**, 1992, **35**, 83-88

7. कुमार, एच० तथा यादव बी०, **प्रोसीडिंग सेकेन्ड इन्टरनेशनल सैफ्लावर, कांफिरेन्स**, 1989, 195-205

8. चैंक-मैन, एस० आर० तथा मैकनील, एफ० एच०, **क्राप साइन्स**, 1970, **10**, 45-46

9. कुमार एच०, पी० एच० डी० थीसिस (एग्रीकल्चर) बनारस हिन्दू यूनीवर्सिटी, वाराणसी 1973

10. स्वाभी नाथन, एम० एस०, नायक, एम० एस०, कौल ए० के० तथा आस्टिन, ए०, **इंडियन जर्न० एग्रो० साइन्स**, 1971, **41**, 393-406

11. क्राप, एल० आई० तथा हैगमन, आर० एच०, **क्राप साइन्स**, 1970, **10**, 280-285

12. जानसन, बी० ए०, ड्रापर, ए० एफ० तथा गावसकी, पी० एच, **एग्रो० जर्न०**, 1973, **65**, 259-263

13. हक्लस्वी, डी० पी०, ब्रान, सी० एम०, हावेल, जे० ई० तथा हैगमन, आर० एच०, **एग्रो० जर्न०**, 1971, **63**, 274-276

14. यादव, "बी०, पी० एच० डी० थीसिस" (एग्री०) बनारस हिन्दू यूनीवर्सिटी, वाराणसी, 1989

15. यादव बी० तथा कुमार एच०, "सिसिम एण्ड सैफ्लावर न्यूज लेटर" 1989, **4**, 45-49

16. नेडेकर, जी० डब्लू० तथा कोचरान डब्लू० जी०, Statistcel Analysis आक्सफोर्ड, आई० बी० एच० पब्लिसिंग कम्पनी (छठा संस्करण) 1967

# लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिये।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सकेंगे।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दूगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—

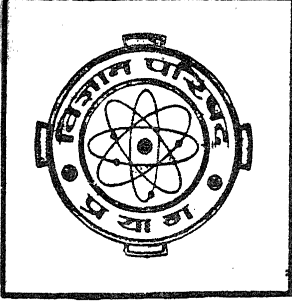
फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०, **जाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

10. लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2" इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

**प्रबंध सम्पादक**

ISSN 0505-5806




# VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

# विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 37 April 1994 No. 2

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेक्नॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्·इलाहाबाद

# विषय सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 2, 1994

# द्वितीय प्रकार के बहुचरीय बर्नौली बहुपदों के कुछ गुण

एस० एस० मिश्रा तथा आर० एन० शुक्ला
गणित तथा सांख्यिकीय विभाग, अवध विश्वविद्यालय, फैजाबाद

[ प्राप्त—मार्च 7, 1993 ]

## सारांश

लेखकों ने अपने द्वारा परिभाषित बहुचरीय बर्नौली बहुपद पर ऐपेल तिर्यक अनुक्रम तथा सान्त अन्तर सूत्र जैसे नवीन गुणों को प्राप्त करने के उद्देश्य से अपने शोध कार्य को आगे बढ़ाया है।

## Abstract

**A certain properties of multivariate Bernoulli polynomials of second kind.** *By* S. S. Misra and R. N. Shukla, Department of Mathematics and Statistics, Avadh University, Faizabad.

A multivariate Bernoulli polynomial defined by us [5] has been subjected to further investigation in order to yield some novel striking properties such as Appell Cross sequence and finite difference formulae etc.

जार्डन [1], रिचार्डसन [4] एवं प्रभाकर तथा गुप्त [2] ने द्वितीय प्रकार के बर्नौली बहुपदों का विशद अध्ययन किया है। इधर के वर्षों में पाल इत्यादि[3] ने उसी बहुपद को दो चरों (variate में सार्वीकृत किया है। इस बहुपद का और आगे अध्ययन करने पर [5] निम्नलिखित परिभाषा दी गई है।

$$\frac{t^{\sum_{r=1}^{k} rp_r} \prod_{r=1}^{k} (1+t^r)^{x_r}}{\sum_{r=1}^{k} (\log (1+t^r))^{p_r l}} = \sum_{n=0}^{a} A_n \begin{pmatrix} p_1, p_2, —: p_k \\ x_1, x_2, —: x_k \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

जहाँ

$pr, r=1, 2, 3 \ldots$ ; $k$ अ शून्य वास्तविक संख्याएँ हैं ।

2. ऐपेल का तिर्यक अनुक्रम

$p_1, p_2 \ldots p^k$ के स्थान में $p_1+q_1, p_2+q_2, \ldots, p_k+q_k$, एवं $x_1, x_2 \ldots x_k$ के स्थान पर $x_1+y_1, x_1+y_2, \ldots, x_k+y_k$ रखने पर समीकरण (1.1) का स्वरूप

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \begin{matrix}[p_1+q_1, p_2+q_2, \ldots, p_k+q_k] \\ (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots x_k+y_k)\end{matrix} t^2/n\,!$$

$$= \frac{t \sum_{r=1}^{\infty} r\,(p_r+q_r) \prod_{r=1}^{k} (1+t^r)^{(x_r+y_r)}}{\prod_{r=1}^{k} (\log (1+t^r))^{(p_r+q_r)}} \tag{1.2}$$

हो जाता है जो (1.1) के परिप्रेक्ष्य में तुरन्त ही

$$A_n \begin{matrix}[p_1+q_1, \ldots, p_k+q_k] \\ (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_k+y_k)\end{matrix}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} A_m \begin{matrix}[p_1, p_2, \ldots, p_k] \\ (x_1, x_2, \ldots, x_k)\end{matrix}$$

$$A_{n-m} \begin{matrix}[p_1, p_2, \ldots, p_k] \\ (y_1, y_2, \ldots, y_k)\end{matrix} \quad , \forall\, n.$$

प्रदान करता है जो प्रत्येक $p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots\ldots, q_k$ के लिए तथा प्रत्येक $x_1, x_2, \ldots, x_k$ एवं $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_k$ के लिए सत्य हैं । यह गुण बताता है कि यह ऐपेल तिर्यक अनुक्रम है ।

समीकरण (1.1) में $p_1=p_2=\ldots p_k=1$ तथा $q_1=q_1-1$, $q_2=q_2-1$ एवं $q_k=q_{k-1}$ रखने पर हमें (2.2) प्राप्त होता है

$$A_n \begin{matrix}[p_1, y_2, \ldots, p_k] \\ (x_1+y_1, x_2+y_2, x_k+y_k)\end{matrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{m} A_m \begin{matrix}[p_1, p_2, \ldots, p_k] \\ (x_1, x_2, \ldots, x_k)\end{matrix}$$

$$A_{n-m} \begin{matrix}[p_1-1, p_2-1, \ldots, p_k-1] \\ (y_1, y_2, \ldots, y_k)\end{matrix} \tag{2.2}$$

अब एक ही साथ $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ को परस्पर परिवर्तित करने पर

$$A_n^{[p_1, p_2, \dots, p_k]}(x_1, x_2, \dots, x_k)=\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{m} A_k \quad A_{n-m}^{[p_1-1,\ p_2-1, \dots, p_{k-1}]}(x_1, x_2, \dots, x_k) \tag{2.3}$$

3 सान्त अन्तर सूत्र

हम नार्लुण्ड आपरेटर $\underset{w}{\triangle}$ का प्रवर्तन करेंगे जिसको निम्नलिखित सम्बन्ध द्वारा परिभाषित किया जाता है

$$\underset{w}{\triangle} f(x)=\frac{f(x+w)-f(x)}{w}. \tag{3.1}$$

इस संकेत का यह लाभ है कि

$$\lim_{w\to 0} \underset{w}{\triangle}=Df(x), \qquad D=\frac{d}{dx}. \tag{3.2}$$

पश्च आपरेटर $\underset{w}{\triangle} f(x)$ की परिभाषा निम्नवत् है

$$\underset{w}{\nabla} f(x)\tfrac{1}{2}[f(x)+f(x+w)]^{w} \tag{3.3}$$

यदि $w=1$, तो $\underset{1}{\triangle}$ के स्थान पर $\triangle$ और $\nabla$ के स्थान पर $\underset{1}{\nabla}$ लिखना सुविधाजनक होगा।

पुन: $f(x, y)$ पर विचार करें जहाँ $x$ तथा $y$ को स्वतन्त्र चर माना जाता है। तब हम आंशिक अन्तरगुणांक को $x$ तथा $y$ के प्रति (3.4) तथा (3.5) द्वारा परिभाषित करते हैं।

$$\underset{w}{\triangle} f(x, y)=\frac{[f(x+w, y)-f(x, y)]}{w} \tag{3.4}$$

तथा

$$\underset{h}{\triangle}^{y} f(x, y)=\frac{[f(x+h, y)-f(x, y)]}{h} \tag{3.5}$$

इन संकेतों का यह लाभ है कि

$$\lim_{w\to 0} \underset{w}{\triangle}_{n} f(x, y)=D_x f(x, y) \tag{3.6}$$

तथा

$$\lim_{h\to 0} \underset{h}{\triangle}_{y} f(x, y)=D_y f(x, y). \tag{3.7}$$

इसी तरह

$$\underset{w}{\nabla}_x\ f(x, y)=\tfrac{1}{2}[f(x, y)+f(x+w, y)] \tag{3.8}$$

तथा

$$\underset{h}{\nabla}_y\ f(x, y)=\tfrac{1}{2}[f(x, y)+f(x)\ y+h)] \tag{3.9}$$

पुन: $f(x_1, x_2,\ldots, x_k)$ पर विचार करें जहाँ $x_1, x_2,\ldots, x_k$ को स्वतंत्र चर माना जाता है। हम आंशिक अन्तर गुणांकों को $x_1, x_2\ldots\ldots, x_k$ के प्रति निम्नलिखित द्वारा परिभाषित करते हैं ।

$$\underset{w_1}{\Delta}^{x_1}\ f(x_1, x_2,\ldots, x_k)=\frac{[f(x_1, x_2,\ldots, x_k+w_k)-f(x_1, x_2,\ldots, x_k)]}{w_1} \tag{3.10}$$

तथा

$$\underset{w_k}{\Delta}x_k\ f(x_1, x_2,\ldots, x_k)=\frac{[f(x_1, x_2,\ldots, x_k+w_k)-f(x_1, x_2,\ldots, x_k)]}{w_k} \tag{3.11}$$

इन संकेतों का यह लाभ है कि

$$\lim_{w_k\to 0}\ \underset{w_k}{\Delta}x_k\ f(x_1, x_2,\ldots, x_k)=Dx_k\, f(x_1, x_2,\ldots, x_k).$$

इसी तरह

$$\underset{h_k}{\nabla}x_k\ f(x_1, x_2,\ldots, x_k)=\tfrac{1}{2}[f(x_1, x_2,\ldots, x_k)+f(x_1, x_2,\ldots, x_k+h_k)] \tag{3.12}$$

(3.1) में परिभाषित नार्लुण्ड आपरेटर को व्यवहृत करने पर हमें

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ \Delta_{x_1}\ A_n^{[p_1, p_2,\ldots, p_k]}(x_1, x_2,\ldots, x_k)\frac{t^n}{n!}$$

$$=\frac{t^{\sum_{r=1}^{k}\ {}^{r}p_r}\ \prod_{r=2}^{k}\ (1+t^r)^{x_r}\ (1+t)^{x_1+1}}{\sum_{r=1}^{k}\ (\log\,(1+t^r))^{p_r}}$$

$$-\frac{t^{\sum_{r=1}^{k}\ {}^{r}p_r}\ \prod_{r=2}^{k}\ (1+t^r)^{x_r}}{\prod_{r=1}^{k}\ (\log\,(1+t^r))^{p_r}}$$

$$=[1+t-1)\;\frac{t\;\sum_{r=1}^{k}{}^{r}p_r\prod_{r=1}^{k}(1+t^r)^{x_r}}{\sum_{r=1}^{k}(\log(1+t^r)^{x_r}}$$

$$=t.\;\frac{t\;\sum_{r=1}^{k}{}^{r}p_r\prod_{r=1}^{k}(1+t^r)^{x_r}}{\sum_{r=1}^{k}(\log(1+t^r)^{p_r}}$$

$$=t\sum_{n=0}^{\infty}A_n\overset{[p_1,p_2,\ldots,p_k]}{(x_1,x_2,\ldots,x_k)}\frac{t^n}{n!}$$

अथवा

$$\sum_{n=0}^{\infty}\triangle_{x_1}A_n\overset{[p_1,p_2,\ldots,p_k]}{(x_1,x_2,x_k)}\frac{t^n}{n!}$$

$$=t\sum_{n=0}^{\infty}A_n\overset{[p_1,p_2,\ldots,p_k]}{(x_1,x_2,\ldots,x_k)}\frac{t^n}{n!} \qquad (3.13)$$

तथा

$$\sum_{n=0}^{\infty}\triangle_{x_2}A_n\overset{[p_1,p_2,\ldots.p_k]}{(x_1,x_2,\ldots,x_k)}\frac{t^n}{n!}$$

$$=\frac{t\;\sum_{r=1}^{k}{}^{r}p_r(1+t)^{x_1}(1+t^2)^{x_2+1}\prod_{r=3}^{k}(1+t^r)^{x_r}}{\prod_{r=1}^{k}(\log(1+\bar{t}^r)^{p_r}}$$

$$\frac{t\;\sum_{r=1}^{k}{}^{r}p_r\prod_{r=1}^{k}(1+t^r)^{x_r}}{\prod_{r=1}^{k}(\log(1+t^r)^{p_r}}$$

$$=\frac{[(1+t^2)-1]t \sum_{r=1}^{k} {}^{r}p_r \prod_{r=1}^{k} (1+t^r)^{x_r}}{\sum_{r=1}^{k} (\log(1+t^r))^{p_r}} \tag{3.14}$$

समीकरण (1.1) केवल पर उपर्युक्त व्यंजक निम्नलिखित में समानीत हो जाता है

$$\sum_{n=0}^{\infty} \triangle_{x_2} A_n \begin{matrix}[p_1, p_2, \ldots, p_k]\\(x_1, x_2, \ldots, x_k)\end{matrix} \frac{t^n}{n!}$$

$$=t \sum_{n=0}^{\infty} A_n \begin{matrix}[p_1, p_2, \ldots, p_k]\\(x_1, x_2, \ldots, x_k)\end{matrix} \frac{t^n}{n!} \tag{3.15}$$

इसी तरह आगे बढ़ने पर हम निम्नलिखित परिणामों को प्राप्त कर सकते हैं

$$\sum_{n=0}^{\infty} \triangle_{x_3} A_n \begin{matrix}[p_1, p_2, \ldots, p_k]\\(x_1, x_2, \ldots, x_k)\end{matrix} \frac{t^n}{n!}=t^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \begin{matrix}[p_1, p_2, \ldots, p_k]\\(x_1, x_2, \ldots, x_k)\end{matrix} \frac{t^n}{n!} \tag{3.16}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \triangle x_1 A_n \begin{matrix}[p_1, p_2, \ldots, p_k]\\(x_1, x_2, \ldots, x_k)\end{matrix} \frac{t^n}{n!}=t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \begin{matrix}[p_1, p_2, \ldots, p_k]\\(x_1, x_2, \ldots, x_k)\end{matrix} \frac{t^n}{n!}$$

तथा

$$\sum_{n=0}^{\infty} \triangle x_k A_n \begin{matrix}[p_1, p_2, \ldots, p_k]\\(x_1, x_2, \ldots, x_k)\end{matrix} \frac{t^n}{n!}=t^k \sum_{n=0}^{\infty} A_n \begin{matrix}[p_1, p_2, \ldots, p_k]\\(x_1, x_2, \ldots, x_k)\end{matrix} \frac{t^n}{n!} \tag{3.17}$$

समीकरण (1.1) में $\underset{x_1}{\triangle}$ पर आपरेट करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty} \triangle x_1 A_n \begin{matrix}]p_1, p_2, \ldots, p_k]\\(x_1, x_2, \ldots, x_k)\end{matrix} \frac{t^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{2} \frac{t \left[\sum_{r=0}^{r} {}^{r}p_r \sum_{r=1}^{k} (1+t^r)^{x_r}+t \sum_{r=2}^{k} {}^{r}p_r \prod_{r=2}^{k} (1+t^r)^{x_r} [1+t)^{x_1+1}\right]}{\prod_{r=1}^{k} (\log(1+t^r))^{p_r}}$$

$$=\frac{1}{2}\,[1+1+t]\frac{\left[t^{\sum\limits_{r=1}^{k} rp_r}\ \prod\limits_{r=1}^{k}(1+t^r)^{x_r}\right]}{\prod\limits_{r=1}^{k}(\log(1+t^r))^{p_r}} \tag{3.18}$$

$$=\frac{1}{2}[2+t]\left[\frac{t^{\sum\limits_{r=1}^{k} rp_r}\prod\limits_{r=1}^{k}(1+t^r)^{x_r}}{\prod\limits_{r=1}^{k}(\log(1+t^r)^{p_r}}\right]$$

$$=1+t/2)\left[\frac{t^{\sum\limits_{r=1}^{k} rp_r}\ \prod\limits_{r=1}^{k}(1+t^r)^{x_r}}{\prod\limits_{r=1}^{k}(\log(1+t^r))^{p_r}}\right]$$

अथवा

$$\sum_{n=0}^{\infty}\nabla_{x_1}A_n^{[p_1,p_2,\ldots,p_k]}(x_1,x_2,\ldots,x_k)\ \frac{t^n}{n!}$$

$$=(1+t/2)\left[\frac{t^{\sum\limits_{r=1}^{k} rp_r}\prod\limits_{r=1}^{k}(1+t^r)^{x_r}}{\prod^{k}(\log(1+t^r))^{p_r}}\right] \tag{3.19}$$

तथा

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_{x_2}A_n^{[p_1,p_2,\ldots,p_k]}(x_1,x_2,\ldots,x_k)\ \frac{t^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\left[t^{\sum\limits_{r=1}^{k} rp_r}\ \prod\limits_{r=1}^{k}(1+t^r)^{x_r}+\ t^{\sum\limits_{r=0}^{k} rp_r}(1+t)^{x_1}(1+t^r)^{x_2+1}\prod\limits_{r=3}^{k}(1+t^r)^{x_r}\right]}{\prod\limits_{r=1}^{k}(\log(1+t^r))^{p_r}}$$

$$=\frac{1}{2}\;\frac{[2+t^2]\left[\;t^{\sum_{r=1}^{k} r p_r}\prod_{r=1}^{k}(1+t^r)^{x_r}\right]}{\prod_{r=1}^{k}(\log(1+t^r)^{p_r}}$$

$$(1+t^2/2)\;\frac{\left[\;t^{\sum_{r=1}^{k} r p_r}\prod_{r=1}^{k}(1+t^r)^{x_r}\right]}{\prod_{r=1}^{k}(\log(1+t^r)^{p_r}}$$

अथवा

$$\sum_{n=0}^{\infty}\nabla_{x_2} A_n^{[p_1, p_2,\ldots, p_k]}(x_1, x_2,\ldots, x_k)\frac{t^n}{n!}$$

$$(1+t^2/2)\;\frac{\left[\;t^{\sum_{r=1}^{\infty} r p_r}\prod_{r=1}^{k}(1+t^r)^{x_r}\right]}{\sum_{r=1}^{k}(\log(1+t^r))^{p_r}} \tag{3.20}$$

इसी भाँति अग्रसर होने पर हम निम्नलिखित परिणाम प्राप्त कर सकते हैं

$$\sum_{n=0}^{\infty}\nabla_{x_3} A_n^{[p_1, p_2,\ldots, p_k]}(x_1, x_2,\ldots, x_k)\frac{t^n}{n!}(1+t^3/2)\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2,\ldots, p_k]}(x_1, x_2,\ldots, x_k)\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_{k-1} A_n^{[p_1, p_2,\ldots, p_k]}(x_1, x_2,\ldots, x_k]\frac{t^n}{n!}\;(1+t^{n-1}/2)\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2,\ldots, p_k]}(x_1, x_2,\ldots, x_k)$$

तथा

$$\sum_{n=0}^{\infty}\nabla x_k A_n^{[p_1, p_2,\ldots, p_k]}(x_1, x_2,\ldots, x_k)\frac{t^n}{n!}(1+t^k/2)\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{[p_1, p_2,\ldots, p_k]}(x_1, x_2,\ldots, x_k)\frac{t^n}{n!} \tag{3.21}$$

## निर्देश

1. जार्डेन, सी. , Calculus of Finite Differences, सेल्सला पब्लिकेशन कम्पनी, न्यूयार्क 1950

2. प्रभाकर, टी. आर. तथा शारदा शुक्ला , Indian Journal Pure and applied Maths. 1986, **11**, 61-62.

3. पाल, एस. जी., राय, वी. एस. तथा सिंह, एस० एन० विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, 1986, **29**.

4. रिसर्डसन, सी. एच. , An Introduction to the calculus of finite difference. D. Bananna trand Co. New York, 1954.

5. मिश्रा, एस. एस. तथा शुक्ला, आर. एन. , Indian Journal Pure and applied Maths. (प्रेषित)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 2, 1994

# जैकोबी श्रेणी की बौरल संकलनीयता

जी० पी० सिंह
गणित विभाग, केन्द्रीय विद्यालय, गया (बिहार)

[ प्राप्त—अक्टूबर 13, 1993 ]

**सारांश**

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य जैकोबी श्रेणी की बौरल संकलनीयता के लिये समानधर्मा परिणाम प्राप्त करना है।

**Abstract**

**Borel summability of Jacobi series.** *By* G. P. Singh, Department of Mathematics, Kendriya Vidyalaya No. II, Military Camp, Gaya (Bihar).

The object of the paper is to obtain an analogous result for the Borel summability of Jacobi series in the following theorem. If

$$\int_0^t |f(x\pm u)-f(x)|dx=O\left[\frac{t}{\log 1/t \log 1/t}\right] (t\to 0)$$

then the Jacobi series

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$ is summable $(B)$ to $f(x)$ at an interior point

of the interval $(-1, 1)$.

फूरियर जैकोबी श्रेणी, जो लबैस्क समाकलनीय फलन से रेखीय अन्तराल में सम्बद्ध है $-1\leqslant x\leqslant 1$, द्वारा परिभाषित है वह है

$$f(x)\sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{1.1}$$

जहाँ

$$a_n = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}} \quad \frac{!(n+1)\;!(n+\alpha+\beta+1)}{!(n+\alpha+1)\;!(n+\beta+1)} \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\; P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, f(x)\, dx, \tag{1.2}$$

तथा

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ सूचक है $(\alpha, \beta)$ कोटियों वाले नवें जैकोबी बहुपद का।

2. श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$,

आंशिक योगों सहित बोरेल विधि या केवल संकलनीय (B) से योग में समाकलनीय कही जाती है यदि

$$\lim_{r\to\infty} e^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} S_n, \tag{2.1}$$

विद्यमान हो तथा $S$ के तुल्य हो ।[2]

3. साहनी [4] ने व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी की बौरल संकलनीयता के लिए निम्नलिखित परिणाम स्थापित किया है ।

**प्रमेय**

यदि

$$\int_0^t |\psi(u)|\, du = 0\left[\frac{t}{\log 1/t}\right], \tag{3.1}$$

तो व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी संकलनीय $(B)$ है योग शून्य तक विन्दु $t=0$ पर जहाँ

$$\psi(t) = \tfrac{1}{2}\{f(x+t) - f(x-t)\}$$

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य जैकोबी श्रेणी की बोरल संकलनीयता के लिए समानधर्मा परिणाम प्राप्त करना है जो निम्नवत् है—

**प्रमेय**

यदि

$$\int_0^t |f(x\pm u) - f(x)|\, dx = 0\left[\frac{t}{\log 1/t \log.\log 1/t}\right] \quad (t\to 0) \tag{3.2}$$

तो जैकोबी श्रेणी (1.1) संकलनीय $(B) f(x)$ तक अन्तराल$(-1,1)$ में आन्तरिक विन्दु $x$ पर है।

4. हमारे प्रमेय के लिये निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी—

**प्रमेयिका 1.** (सैनसोन[5]).

$$\sum_{\nu=1}^{n} (2\nu+1) P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) P_\nu^{(\alpha,\beta)}(y)$$

$$=(n+\alpha+\beta+1)\frac{\left\{ P_{(n+1)}^{(\alpha,\beta)}(y)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-P_n^{(\alpha,\beta)}(y)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}}{y-x}$$

यह आइडेंटिटी क्रिस्टोफेल का संकलन सूत्र है।

**प्रमेयिका 2.**

प्रतिबन्ध (3.2)के अन्तर्गत हमें

$$\int_0^t |f\{\cos(\theta-v)\}-f(\cos\theta)|\; d=0\left[\frac{t}{\log 1/t \log 1/t \log 1/t}\right]$$

ज्यों ज्यों $t \to 0$,

प्राप्त होता है जहाँ $X=\cos\theta$, $X+u=\cos\phi$, तथा $\theta-\phi=v$

इस प्रमेयिका की उपपत्ति फोआ[1] के अनुसार प्राप्त की जा सकती है।

## 5. प्रमेय की उपपत्ति

जैकोबी श्रेणी के $n$ वें आंशिक योग को निम्नवत् लिखा जाता हैं—

$$S_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$=\frac{n+1+\alpha+\beta}{2}\int_{-1}^{1} f(y\times\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(y)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-P_n^{(\alpha,\beta)}(y)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{y-x}dy$$

$f(y)=1$ रखने पर

$$1=\frac{n+\alpha+\beta+1}{2}\times\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(y)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-P_n^{(\alpha,\beta)}(y)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{y-x}\,dy$$

अतः

$$S_n(x)-f(x)=\frac{n+\alpha+\beta+1}{2}\int_{-1}^{1}[f(y)-f(x)]\times$$

$$\times\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(y)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-P_n^{(\alpha,\beta)}(y)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{y-x}dy$$

अब 1 से कम धनात्मक संख्या $s$ लेकर इसे $u$ तथा $r$ इन दो अन्य संख्याओं के तुल्य में मानेंगे। मान कि $d$ ऐसी अन्य धन संख्या है जिससे कि $0<d<\mu$, तथा माना $\mu x$ तथा $\mu x'$ दो संतत फलन हैं $(-1, 1)$ के अन्तर्गत जो $d\leqslant\mu x\leqslant x$, $d\leqslant\mu x'\leqslant u$ सीमाओं के भीतर अवस्थित हैं।

इस तरह $-1+s\leqslant x\leqslant 1-s$ के लिये

$$S_n(x)-f(x)=\frac{n+\alpha+\beta+1}{2}\left[\int_{-1}^{x-\mu x}+\int_{x-\mu x}^{x+\mu x'}+\int_{x+\mu x'}^{1}\right]\times$$

$$\times[f(y)-f(x)]\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(y)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-P_n^{(\alpha,\beta)}(y)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{y-x}dy+0(1).$$

$$=A_n(x)+B_n(x)+C_n(x)+0(1),\text{ माना} \tag{5.1}$$

हाब्सन [3] ने दिखलाया है कि

$$-1+s\leqslant x\leqslant 1+s$$

के लिए एकसमान रूप से

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x)=0$$

तथा

$$\lim_{n\to\infty} C_n(x)=0 \tag{5.2}$$

अब माना कि $x=\cos\theta$, $y=\cos\phi$, $0<\theta<\pi$, $0<\phi<\pi$, $1-=\cos\rho$, $1-(\mu+\delta)=1-s=\cos(\rho+\sigma)$, $0<\rho+\pi/2$, $0<\delta$ ; $\rho+\sigma<\pi/2$ । इस प्रकार यदि $1/r^{\alpha}$ $(0<\alpha<\frac{1}{2})$, द्वारा

$$[\text{arc}\cos u-\text{arc}\cos(u+\mu)]$$

का न्यूनतम सूचित हो, $u$ के लिये $(-1, 1-\mu)$ में

सैन्सोन[5] का अनुसरण करने पर

$$B_n(\cos\theta)=\frac{n+\alpha+\beta+1}{2}\int_{\theta-1/r^\lambda}^{\theta+1/r^\lambda}[f(\cos\phi)-f(\cos\theta)]\times$$

$$\times\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi)P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi)-P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)}{\cos\phi-\cos\theta}\times\sin\phi d\phi,$$

जिसमें

$$\rho+\sigma\leqslant\theta\leqslant\pi-(\rho+\sigma);\ 0<\frac{1}{r^\lambda}<\sigma$$

लगातार रूपान्तर द्वारा हम प्राप्त करते हैं

$$B_n(\cos\theta)=D_n(\theta)+E_n(\theta) \tag{5.3}$$

जहाँ

$$D_n(\theta)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(\sin\theta)}}\int_{\theta-1/r^\lambda}^{\theta+1/r^\lambda}[f(\cos\phi)-f(\cos\theta)]\times$$

$$\times\frac{\sin(n+\alpha+\beta+1)(\theta-\phi)\sqrt{(\sin\phi d\phi}}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\phi)},$$

तथा स्पष्टतः सैनसोन[5] की ही तरह

$E_n(\theta)=0(1)$, ज्यों-ज्यों $n\to\infty$, $(-1+s,\ 1-S)$ के अन्तर्गत । $\theta-\phi=t$ रखने पर (5.4)

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\theta-\phi}\int_0^{1/r^\lambda}[f\{\cos(\theta-t)\}-f(\cos\theta)]$$

$$\times\frac{\sin(n+\alpha+\beta+1)t\sin\frac{1}{2}(\theta-t)\,dt}{\sin\frac{1}{2}t}+0(1)$$

$$=2H\int_0^{1/r^\lambda}\psi(t)\frac{\sin(n+\alpha+\beta+1)t}{t}\sin\tfrac{1}{2}(\theta-t)\,dt+0(1),$$

जहाँ

$$H=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\theta},$$

तथा

$$\psi(t)=[f\{\cos(\theta-t)\}-f(\cos\theta)].$$

$$\therefore\ e^{-r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\{S_n(x)-f(x)\}$$

$$=2H\,e^{-r}\int_0^{1/r^\lambda}\frac{\psi(t)}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n\sin(n+\alpha+\beta+1)t\sin\frac{1}{2}(\theta-i)}{n\,!}\,dt$$

$$+0(1)$$

$$=2H\int_0^{1/r^\lambda}\frac{\psi(t)}{t}\times\frac{\sin(r\sin t+\alpha t+\beta t+t)}{\exp\{r(1-\cos t)\}}\sin\tfrac{1}{2}(\theta-t)dt$$

$$+0(1)$$

$$=2H\left(\int_0^{1/r}+\int_{1/r}^{1/r^\lambda}\right)\frac{\psi(t)}{t}\times\frac{\sin(r\sin t+\alpha t+\beta t+t)}{\exp\{r(1-\cos t)\}}$$

$$\times\sin\tfrac{1}{2}(\theta-t)\,dt+0(1)$$

$$=I_1+I_2+0(1)\text{ माना}\qquad(5.5)$$

अब $I_1$ पर बिचार करने पर

$$I_1=2H\int_0^{1/r}\frac{\psi(t)}{t}\,\frac{\sin(r\sin t+\alpha t+\beta t+t)}{\exp\{r(1-\cos t)\}}\times\sin\tfrac{1}{2}(\theta-t)dt$$

$$=0(1)\quad\int_0^{1/r}\frac{|\psi(t)|}{t}\,0\,(rt+\alpha t+\beta t+t)dt$$

$$=0(r+\alpha+\beta+1)\int_0^{1/r}|\psi(t)|dt$$

$$=0(r+\alpha+\beta+1)\;0\left[\frac{1}{r}\times\frac{1}{\log r\log\log r}\right]$$

$$=0(1),\text{ ज्यों ज्यों } r\to\infty.$$

पुन: द्वितीय माध्य मान प्रमेय के सम्प्रयोग से

$$I_2=2H\int_{1/r}^{1/r^\lambda}\frac{\psi(t)}{t}\,\frac{\sin(r\sin t+\alpha t+\beta t+t)}{\exp\{r(1-\cos t)}\times\sin\tfrac{1}{2}(\theta-t)\,dt$$

$$=\frac{2H}{\exp\left\{r2\sin^2\frac{1}{2r}\right\}}\int_{1/r}^{1/r^{\lambda'}}\frac{\psi(t)}{t}\times\sin(r\sin t+\alpha t+\beta t+t)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\theta-t)\,dt$$

जहाँ

$$\frac{1}{r} < \frac{1}{r^{\lambda'}} < \frac{1}{r^{\lambda}}$$

$$= 0(1) \int_{1/r}^{1/r^{\lambda'}} \frac{|\psi(t)|}{t} dt$$

$$= 0(1) \left[\frac{\int|\psi(t)|}{t}\right]_{1/r}^{1/r^{\lambda}} + 0\,(1) \int_{1/r}^{1/r^{\lambda}} \frac{|\psi(t)|}{t^2} dt$$

$$= 0(1) \left[ 0 \left[\frac{t}{\log 1/t \log\log 1/t} \times 1/t\right]_{1/r}^{1/r^{\lambda}}\right.$$

$$\left. + 0(1) \int_{1/r}^{1/r^{\lambda}} \left[\frac{t}{\log 1/t \log 1/t} \times 1/t^2 \right] dt\right.$$

$$= 0 \left[\frac{1}{\log r \log\log r}\right] + 0(1) \int_{1/r}^{1/r^{\lambda}} 0 \left[1/t \times \frac{1}{\log 1/t \log\log 1/t}\right] dt$$

$$= 0 \left[\frac{1}{\log r \log\log r}\right] + 0(1) \int_{1/r}^{1/r^{\lambda}} 1/t \times \frac{1}{\log 1/t \log\log 1/t} dt$$

$$= 0 \left[\frac{1}{\log r \log\log r}\right] + 0(1) \times \frac{1}{\log r \log\log r} \int_{1/r}^{1/r^{\lambda}} 1/t\, dt$$

$$= 0(1) + 0(1) \times \frac{1}{\log r \log\log r} \Big[\log t\Big]_{1/r}^{1/r^{\lambda}}$$

$$= 0(1) + 0(1) \frac{1}{\log r \log\log r} \times \log r\,(1-\lambda)$$

$$= 0(1) + 0(1) \times \frac{(1-\lambda)}{\log\log r} = 0(1) + 0(1) \text{ ज्यों ज्यों } r \to \infty$$

$$= 0(1) \text{ ज्यों ज्यों } r \to \infty$$

अत:

$$e^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \{S_n(x) - (x)\} = 0(1), \text{ ज्यों ज्यों } r \to \infty.$$

इस पर प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई ।

## कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय के गणित विभाग के अध्यक्ष प्रो० एल० एम० त्रिपाठी के प्रति कृतज्ञता प्रकट करता है जिन्होंने अपने सुझाओं से लाभान्वित किया ।

## निर्देश

1. फोआ, ए० , Boll. Univ. Math. Ital, 1943, 5 (2), 18-27.

2. हार्डी, जी० एच० , Divergent Series, आक्सफोर्ड 1949.

3. हाब्सन, ई० डब्लू०, London Mathematical Society, 1909, 7 (2), 24-29.

4. साहनी, बी० एन० , Boll. Un. Mat. Ital., 1961, **16** (3), 44-47.

5. सैनसोन, जी० , Orthogonal functions. English Edition, 1959.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 2, 1994

# $H[z_1, \ldots\ldots, z_1]$ का जैकोबी फलन-युक्त श्रेणियों में विस्तार

अशोक कुमार रोंघे
गणित विभाग, एस० एस० एल० जैन कनिष्ठ महाविद्यालय, विदिशा (म० प्र०)

[ प्राप्त—जुलाई 15, 1993 ]

## सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में जैकोबी फलन के गुणनफलयुक्त सान्त समाकलनों और बहुचर H-फलन के कोणांक (Arguments) का विशिष्टीकरण करके मूल्यांकन किया गया है। प्रपत्र में सान्त समाकलनों का, जिसमें जैकोबी फलन युक्त श्रेणियाँ हैं, $H[z_1, \ldots, z_1]$ के विस्तार में प्रयोग करते हैं। चूंकि बहुचर $H$-फलन एक अत्यन्त व्यापक फलनों में से है, अतः इसके प्राचलों के विशिष्टीकरण के नवीन एवं ज्ञात परिणाम विशिष्ट दशाओं के रूप में ज्ञात कर सकते हैं।

## Abstracts

**Some expansion for multivariable H-function in series involving Jacobi polynomial.** *By* Ashok Kumar Ronghe, Department of Mathematics S. S. L. Jain (10+2) Kanista Mahavidyalay, Vidisha (M. P)

In this paper few finite integrals involving product of Jacobi polynomials and multivariable H-function of generalized arguments have been evaluated. These integrals have been utilized to establish the expansion for $H[z_1, \ldots, r_r]$ in series involving products of Jacobi polynomials, since multivarialbe $H$-function is quite general function in nature. On specializing the parameters of the functions involved in the results, many new as well as known relations may be obtained as particular cases.

## 1. विषय प्रवेश :

श्रीवास्तव गुप्ता तथा गोयल (8, P. 251. eqn. 1.1) ने पहले ही कई सम्मिश्र चरों वाले H-फलन अथवा बहुचर H-फलन का प्रवर्तन तथा अध्ययन किया है, किन्तु गोयल[4] तथा गर्ग[5] के दो चरों वाले H-फलन के संकेतन के समान हम निम्नांकित संकेतन का उपयोग करेंगे, जो अधिक संक्षिप्त तथा स्वतः व्याख्यात्मक हैं।

$$H[z_l,\ldots\ldots, z_r]=H \begin{matrix} O, N:\{M_i, N_i\} \\ \\ A, B:\{A_i, B_i\} \end{matrix} \left[ \begin{matrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} S:T \\ \\ S':T' \end{matrix} \right] \text{ या}$$

$$=H \begin{matrix} O, N:\{M_l, N_l,\ldots, M_r\} \\ \\ A, B:\{A_i, B_i,\ldots, A_r, B_r\} \end{matrix} \left[ \begin{matrix} Z_l \\ \vdots \\ Z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a_j:\alpha_j^{(l)},\ldots,\alpha_j^{(r)})\, 1.A : (c_j^{(l)}, E_j^{(t)})\, 1.A_r \\ \\ (b_j:\beta_j^{(l)},\ldots,\beta_j^{(r)})\, 1.\beta : (d_j^{(t)}, \delta_j^{(t)})\, 1.\beta_r \end{matrix} \right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi w)^r}\int_{l_1}\ldots\int_{l_r} \theta(s_1,\ldots\ldots,s_r) \prod_{j=1}^{n} \{\theta_i(s_i)(z_i^{s_i})\, \mathrm{dsi}\} \tag{1.1}$$

जहाँ

$$w=\sqrt{(-1)},\ S=(a_j,\ \alpha_j^{(1)},\ldots,\ \alpha_j^{(r)})\ 1.A \tag{1.2}$$

$$T=(c_j^{i},\ E_j^{i})\ 1.A_r \tag{1.3}$$

$$S'=(b_j:\ \beta_j^{(l)},\ldots,\ \beta_j^{(r)})\ 1.B' \tag{1.4}$$

$$T'=(d_j^{(i)}, \delta_j^{(i)})\ 1.\beta_r \tag{1.5}$$

$$\theta(s_1,\ldots\ldots, s_r)=\prod_{j=1}^{N} \Gamma(1-a_j+\sum_{i=l}^{r} \alpha_j^{(i)} s_i)$$

$$\{\prod_{j=l}^{B} \Gamma(1-b_j+\sum_{i=l}^{r} \beta_j^{(i)} s_i) \sum_{j=l}^{A} a_j-\sum_{i=l}^{r} \alpha_j^{(i)} s_i\}^{-l} \tag{1.6}$$

$$\theta_i(s_i)=\prod_{j=l}^{M_i} \Gamma(d_j^{(i)}-\delta_j^{(i)}) \prod_{j=l}^{N_i} \Gamma(1-c_j^{(i)}+E_j^{(i)} s_i),$$

$$[\prod_{j=M_i+l}^{\beta_i} \Gamma(1-d_j^{(i)}+\delta_j^{(i)} s_i) \prod_{j=N_i+l}^{A_i} \Gamma(c_j^{(i)}-E_j^{(i)} s_i)]^{-l} \tag{1.7}$$

$i=(1,\ldots, r)$, तथा उपलिपि (i) में i डैशों की संख्या है, उदाहरणार्थ $(b_l^{(1)}=b';\ b^{(2)}=b''$ इत्यादि प्रतीक हैं।

प्राचलों पर लगे प्रतिबन्धों, बहुचर $H$-फलनों के उपगामी प्रसार के लिये सक्सेना, श्रीवास्तव तथा पंडा[7,8] के शोधपत्र को देखें।

इस प्रपत्र में हम निम्नलिखित परिणामों का प्रयोग करेंगे, [2 P. 5,8],

$$\int_{-1}^{1} x^{\lambda}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\sigma} Pn^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx,$$

$$=\frac{(1-)^n 2^{\sigma+\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\sigma+\beta+1)\Gamma(\sigma+1)}{n!\,\Gamma(\alpha-\beta-n+1)\,\Gamma(\sigma+\alpha+n+2)}\;{}_3F_2\left[\begin{matrix}-\lambda,\ \sigma-\beta+1,\ \sigma+1; \\ \sigma-\beta-n+1,\ \sigma+\alpha+n+2,\end{matrix}:2\right] \tag{1.8}$$

और

$$\int_{-1}^{1} x^{\lambda}\,(1-x)^{\rho}\,(1+x)^{\beta}\, Pn^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx,$$

$$=\frac{(-1)^n\, 2^{\rho+\beta+1}\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\rho-\beta+1)\Gamma(\rho+1)}{n!\quad \Gamma\rho-\alpha-n+1)\,\Gamma(\rho+\beta+n+2)}\;{}_3F_2\left[\begin{matrix}-\lambda,\ \rho-\beta+1,\ \rho+1, \\ \rho+\alpha-n+1,\ \rho+\beta+n+2\end{matrix}:2\right] \tag{1.9}$$

2. **समाकलन** : इस अनुभाग में हम चार जैकोबी फलनों के गुणनफल वाले समाकलनों से युक्त बहुचर $H$-फलन का मूल्यांकन करेंगे। इन समाकल का प्रयोग हम $H\,[z_l\ldots,\,z_r]$ के विस्तार में करेंगे।

**प्रथम समाकलन** :

$$\int_{-1}^{1} x^{\lambda}\,(1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\sigma}\, Pn^{(\alpha,\beta)}\,(x).\ H[z_l\ ((1+x)/,x)^{\mu_1}\ldots\ldots z_r\ ((1+x)/,x)^{\mu_r}]dx$$

$$=\frac{(-1)^n\, 2^{\sigma+\alpha+1}\Gamma(\alpha+n+l)}{n!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}H\begin{matrix}0,\ \ N+3:\{M_i,\,N_i\}\\ A+3,\ B+3:\{A_i,\,B_i\}\end{matrix}\left|\begin{matrix}z_l & 2^{\mu_1}\\ \vdots & \\ z_r & 2^{\mu_r}\end{matrix}\right|\begin{matrix}P,\,S:T\\ Q,\,S':T'\end{matrix}\right| \tag{2.1}$$

समाकलन (2.1) में P और Q प्राचलों का समुच्चय है, जो कि निम्न है —

$$P:\{(1+\lambda-k:\mu_r),\ (\beta-k-\ :\mu_i\ ,\ldots,\ \mu_r),\ (\sigma-k:\mu_l,\ldots,\ \mu_r)\}$$

$$Q:\{(1+\lambda:\mu_l,\ldots,\ \mu_r),\ (\beta+n-\sigma:\mu_l,\ldots,\ \mu_r),\ (1-\sigma-\alpha-n-k:\mu_l,\ldots,\ \mu_r)\},$$

समाकलन (2.1) निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है। प्रतिबन्ध $_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ धनात्मक राशियाँ है एवं उनमें सभी शून्य तुल्य नहीं हैं।

$$Re\,(\lambda) > -1,\ Re\,(\alpha) > -1,\ |\arg(z_i)| > \tfrac{1}{2}\,\Omega i\pi,\ Re[(\sigma+\mu_j\xi_j) > 0,$$

$$Re[\lambda - \mu_j,\ \xi_j,] > 0,$$

जहाँ

$$\xi_j = \sum_{j=l,}^{r} \min_{1 \leqslant \leqslant M_r} \quad (Re(d_j^{r}\ /,\ \delta_j^{r}\ ),\ \forall\ i, j,\ K \epsilon\ (1 \ldots, r),$$

**द्वितीय समाकलन :**

$$\int_{-1}^{1} x^{\lambda}\,(1-x)^{\alpha}\,(1-x)^{\sigma} \quad P_n^{(\alpha,\beta)}\,(x)\ H[z_l x^{\mu_1}\,(1-x)^{\delta_1} \ldots,\ z_r\, x^{\mu_r}\,(1+x)^{\delta_r}]dx$$

$$= \frac{(=\mu^n\, 2^{\sigma} + \alpha + l\ \Gamma(\alpha+n+l)}{n!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{k!} H \begin{matrix} 0, & N+3\ :[M_i,\ K_i\} \\ & A+3,\ B+3 :\{A_i,\ B_i] \end{matrix} \left[ \begin{matrix} z_l & 2^{\delta_1} \\ \vdots & \\ z_r & 2^{\delta_r} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P,\ S : T \\ \\ Q,\ S' :\ T \end{matrix} \right] \tag{2.2}$$

समाकलन (2.2) में $P$ और $Q$ प्राचलों का समुच्चय है, जो कि निम्न है—

$$P : \{(-\lambda : \mu_l\ , \ldots,\ \mu_r)\ (\beta-\sigma-K : \delta_l, \ldots,\ \delta_r)\ (-K-\sigma : \delta_l, \ldots,\ \delta_r)$$

$$Q : \{(K-\lambda : \mu_l,\ \mu_r)\ (\beta-n-\sigma-K :\ \delta_l, \ldots,\ \delta_r)\ (-l-n-k-0< : \delta_l, \ldots,\ \delta_r)$$

समाकल (2.2)निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है। प्रतिबन्ध, $\mu_l , \ldots, \mu_r$ तथा $\delta_l, \ldots, \delta_r$ धनात्मक राशियाँ है एवं उनमें सभी शून्य के तुल्य नहीं हैं।

$$Re\,(\alpha) > 1,\ |\arg(z_i)| > \tfrac{1}{2}\,\Omega i\pi,\ Re[(\lambda) + \mu_j, j)] > 0,\ Re\,[(\sigma) + \delta_j \xi_j) > 0,$$

जहाँ

$$\xi_j = \sum_{j+l}^{r} \min_{l \leqslant j \leqslant M_r} \quad (Re(d_j^{(r)}\ / \delta_j^{(r)}),\ \forall i, j,\ k \in (l\ , \ldots,\ r), \tag{1.3}$$

**तृतीय समाकलन :**

$$\int_{-1}^{1} x^{\lambda}\,(1-x)^{\rho} \quad (1+x)^{\beta}\, P_n^{(\alpha,\beta)}\,(x)\ H[z_l\ x^{\mu_1}\,(1-x)^{\delta_1}, \ldots, z_r\, x^{\mu_r}\,(2-x)^{\delta_r}]dx$$

$$= \frac{(-1)^n\, 2^{\rho+\beta+l}\ \Gamma(\beta+n+l)}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)2^k}{K!}$$

$$H\begin{matrix} 0, N+3 : \{M_i, N_i\} \\ A+3, B+3: \{A_i, B_i\}\end{matrix}\left[\begin{matrix} z_l & 2^{\delta_1} \\ \vdots & \\ z_r & 2^{\delta_r}\end{matrix}\middle| \begin{matrix} P, S : T \\ Q, S : T\end{matrix}\right] \tag{2.3}$$

समाकलन (3.2) में $P$ और $Q$ प्राचलों का समुच्चय है जो कि निम्न है—

$$P : \{(-\lambda : \mu_l,\ldots, \mu_r), (\alpha-K-\rho : \delta_l,\ldots, \delta_r), (-k\, p : \delta_l,\ldots, \delta_r)\},$$

$$Q : \{(k-\lambda : \mu_l,\ldots, \mu_r), (\alpha-n-\rho : \delta_l,\ldots, \delta_r), (-l-\beta-n-\rho : \delta l ,\ldots, \delta_r)\},$$

समाकलन (2.3) निम्नलिखित प्रतिवन्धों के अन्तर्गत वैध है। प्रतिबन्ध $\mu_l,\ldots, \mu_r$ तथा $\delta_l,\ldots, \delta_r$ धनात्मक राशियाँ है, एवं उनमें सभी शून्य के तुल्य नहीं हैं।

$$Re\ (\beta) > -1,\ Re\ (\lambda) > -1,\ |\arg\ (z_i)| > \tfrac{1}{2}\, \Omega i\pi,\ Rc[(\rho)+\delta_j\xi_j]>0,$$

$$Re\ [(\lambda)+\mu_j\xi_j]>0$$

जहाँ

$$\xi_j = \sum_{j=l}^{r} \min_{l\leqslant j\leqslant M_r} (Re(d_j^{(r)} / \delta_j^{(r)}),\ \forall\ i, j, K \in (l,\ldots, r)$$

**चतुर्थ समाकलन :**

$$\int_{-1}^{1} x^{\lambda}\, (l-x)^{\rho}\, (l+x^{\beta})\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, H[z_l((l-x)/.x)^{\mu_1}\ldots z_r\, ((l-x)/,x)^{\mu_r}]\, dx$$

$$=\frac{(-1)^n\, 2^{\rho+\beta+l}\, \Gamma(\beta+n+l)}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$$

$$H\begin{matrix} 0, N+3 : \{M_i, N_i\} \\ A+3, B+3: \{A_i, B_i\}\end{matrix}\left[\begin{matrix} z_t & 2^{\mu_1} \\ & \\ z_r & 2^{\mu_r}\end{matrix}\middle| \begin{matrix} V, S : T \\ P, S : T\end{matrix}\right] \tag{2.4}$$

समाकलन (2.3) में $V$ और $P$ प्राचलों का समुच्चय हैं जो कि निम्न है—

$$V : \{(l+\lambda- : \mu_l,\ldots, \mu_r), (\alpha-\rho-k : \mu_l,\ldots, \mu_r)\ (-\rho-k : \mu_l,\ldots, \mu_r)$$

$$P : \{(1+\lambda : \mu_l,\ldots, \mu_r)\ (\alpha+n-k-p : \mu_l,\ldots, \mu_r)\ (-l-\rho-\beta-n-K : \mu_l,\ldots, \mu_r)\}$$

समाकलन (2.4) निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है, प्रतिबन्ध $\mu_l,\ldots, \mu_r$ धनात्मक राशियाँ हैं एवं उनमें सभी शून्य के तुल्य नहीं हैं।

$$Re\ (\lambda)>1,\ Re\ (\beta)>-1,\ |\arg\ (z_i(|>\tfrac{1}{2}\Omega i\pi,\ Re\ [(\rho)+\mu_j\xi_j]>0,$$

$$Re\ [(\rho)\mu_j\xi_j]>0,$$

जहाँ

$$\xi_j = \sum_{j=1}^{r} \min_{l<j<M_k} [Re(d_j^{(k)} / \delta_j^{(k)}], \forall\ i, j, K \in (l,\ldots, r),$$

उपपत्ति: (2.1) को सिद्ध करने के लिये (1·1) के द्वारा बहुचर राशियों के $H$-फलन के बाम पक्ष को बहुकंटूर मेलिन-बर्नीज समाकलन के रूप में अभिव्यक्त करते हैं, तथा समाकलन के क्रम को बदलते हैं। यह परिवर्तन कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है, और परम अभिसारी है जिससे हमें निम्नलिखित फल प्राप्त होता है—

$$= \frac{1}{(2\pi w)r} \int_{L_1} \int_{L_r} \phi(s_l,\ldots,s_r) \prod_{j=1}^{r} \{\theta_i\ (s_i)\ (z_i)^{s_i}\} \times$$

$$\left\{ \int_{-1}^{1} x^{\lambda} - (\mu_i,\ s_i + \ldots \mu_1,\ s_i)\ (1-x)^{\alpha}\ (1+x)^{\sigma+\mu_1 s_1+\ldots+\mu_r,\ s_r} \right.$$
$$\left. P_n^{(\alpha,\beta)}\ (x)\ dx \right\} ds_1,\ldots,ds_i$$

अब ज्ञात फल (1.8) की सहायता से आन्तरिक समाकलन का मूल्यांकन करने के पश्चात् हमें निम्न-लिखित फल प्राप्त होता है—

$$= \frac{1}{(2\Pi w)^r} \int_{L_1\ldots} \int_{L_r} \phi(s_1,\ldots,\ s_r) \prod_{j=1}^{r} \{\theta_i(s_i) z_i{}^{s_i}\}$$

$$= \frac{(-1)^n 2^{\sigma+\alpha+1+s_i+,\ldots,+\ \mu_i\ s_r} \Gamma(\alpha+n+1)}{n!\quad \Gamma(\sigma+\alpha+n+2+\mu_1 s_1+\ldots+\ \mu_i\ s_i)}\ {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} -D,\ E,\ F, \\ G,\ H, \end{matrix} :2 \right] ds_1\ldots ds_i$$

जहाँ

$$D = (\lambda+\mu_1,\ s_1+\ldots+\ \mu_i,\ s_i),\ E = (\sigma+\mu_l,\ s_1+\ldots+\mu_i,\ s_i+1-\beta)$$

$$F = (1+\sigma+\mu_1,\ s_1+,\ldots,+\ \mu_i,\ s_i)$$

$$G = (1-\sigma+\beta+n+\mu_1,\ s_1+,\ldots,+\mu_i,\ s_i),\ H = (2+\alpha+n+\sigma+\mu_1,\ s_1+,\ldots,+\mu_1\ s_i)$$

अब हाइपरज्यामिति फलन को श्रेणी के रूप में अभिव्यक्त करने पर और योग एवं समाकलन का क्रम बदलने पर [2. $P$. 176(75)] जो कि (2.1) में दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है। अन्त में बहुचर $H$-फलन की परिभाषा (1.1) के सम्प्रयोग द्वारा (2.1) को प्राप्त करते हैं।

इसी प्रकार समाकलन (2·2), (1·8) की सहायता से (2·3) और (2·4) को (1.9) का उपयोग कर ज्ञात करे सकते हैं।

**3. प्रसार :** इस अनुभाग का उद्देश्य इसमें (2.1 से (2.4) वाले परिणामों का अनुप्रयोग कर उनको $H\text{-}\{z_t,\ldots,z_r\}$ के रूप में अयिव्यक्त करके चार विख्यात प्रसार सूत्रों की स्थापना करना है ।

**प्रथम विस्तार :**

$$x^{\lambda}(1+x)^{\sigma} H[z_1((1+x)/,x)^{\mu_1},\ldots,z_r((1+x)/,x)^{\mu_r}]$$

$$=2^{\sigma}\mathop{\Gamma}_{1=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+\beta+1)(1+\alpha+\beta+2l)}{\Gamma(l+\beta+l)}\cdot P_l^{(\alpha,\beta)}(x)\,2^k/,k!\,x$$

$$H\begin{matrix}0, & N+3:\{M_i,N_i\}\\ A+3, & B+3:\{A_i,B_i\}\end{matrix}\left[\begin{matrix}z_l & 2\mu_l\\ \vdots & \\ z_r & \end{matrix}\middle|\begin{matrix}V, & S:T\\ & \\ P, & S':T_1\end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

विस्तार (3.1) में $V$ और $P$ प्राचलों का समुच्चय है जो निम्न है—

$$V:\{(1+\lambda-K:\mu_1,\ldots,\mu_r),(-K-\sigma:\mu_1,\ldots,\mu_r),(-\sigma+\beta-k:\mu_l,\ldots,\mu_r)$$

$$P:\{(1+\lambda:\mu_1,\ldots,\mu_r),(-1-\sigma-k:\mu_1,\ldots,\mu_r),(-1-\sigma-a-1=k:\mu_1,\ldots,\mu_r)$$

विस्तार (3.1) में जो कि (2.1) दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है एवं संतुष्ट भी करता है ।

**द्वितीय विस्तार :**

$$x^{\lambda}(1+x)^{\sigma} H[z_1 x^{\mu_1}(1+x)^{\delta_1},\ldots,z_r x^{\mu_r}(1+x)^{\epsilon_r}]$$

$$=2^{\sigma}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-l)\,\Gamma(l+\alpha+\beta+l)(l+\alpha+\beta+2l)}{\Gamma(l+\beta+l)}\frac{(-l)^k\,2^k}{k!}P_l^{(\alpha,\beta)}(x)\,x$$

$$H\begin{matrix}0, & N+3:\{M_i,N_i\}\\ A+3, & B+3:\{A_i,B\}\end{matrix}\left[\begin{matrix}z_l & 2^{\mu_l}\\ \vdots & \\ z_r & \end{matrix}\middle|\begin{matrix}P, & S:T\\ & \\ Q, & S':T'\end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

विस्तार (3.2) में $P$ और $Q$ प्राचालों का समुच्चय है जो निम्न है—

$$P:\{(-\lambda:\mu_l,\ldots,\mu_r),(-\sigma-k:\delta_l,\ldots,\delta_r),(-k-\sigma-\beta:\delta_l,\ldots,\delta_r)\}$$

$$Q:\{(k-\lambda:\mu_l,\ldots,\mu_r)\,(l-\sigma-K:\delta_l,\ldots,\varrho_r),(-l-1-2-\rho:\delta_l,\ldots,\delta_r)\}$$

विस्तार (3.2) जो कि (2.2) में दिये गये प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है, एवं संतुष्ट भी करता है ।

3. प्रसार : इस अनुभाग का उद्देश्य इसमें (2.1 से (2.4) वाले परिणामों का अनुप्रयोग कर उनको $H$-$\{z_t,\ldots,z_r\}$ के रूप में अयिव्यक्त करके चार विख्यात प्रसार सूत्रों की स्थापना करना है।

**प्रथम विस्तार :**

$$x^{\lambda}(1+x)^{\sigma} H[z_1((1+x)/,x)^{\mu_1},\ldots,z_r((1+x)/,x)^{\mu_r}]$$

$$=2^{\sigma}\mathop{\Gamma}_{1=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+\beta+1)(1+\alpha+\beta+2l)}{\Gamma(l+\beta+l)}\cdot P_l^{(\alpha,\beta)}(x)\,2^k/,k!\,x$$

$$H\begin{matrix}0,\ N+3:\{M_i,N_i\}\\ A+3,\ B+3:\{A_i,B_i\}\end{matrix}\left[\begin{matrix}z_l & 2\mu_l\\ \vdots & \\ z_r & \end{matrix}\middle|\begin{matrix}V,\ S:T\\ \\ P,\ S':T_1\end{matrix}\right] \quad (3.1)$$

विस्तार (3.1) में $V$ और $P$ प्राचलों का समुच्चय है जो निम्न है—

$$V:\{(1+\lambda-K:\mu_1,\ldots,\mu_r),(-K-\sigma:\mu_1,\ldots,\mu_r),(-\sigma+\beta-k:\mu_l,\ldots,\mu_r)$$

$$P:\{(1+\lambda:\mu_1,\ldots,\mu_r),(-1-\sigma-k:\mu_1,\ldots,\mu_r),(-1-\sigma-a-1=k:\mu_1,\ldots,\mu_r)$$

विस्तार (3.1) में जो कि (2.1) दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है एवं संतुष्ट भी करता है।

**द्वितीय विस्तार :**

$$x^{\lambda}(1+x)^{\sigma} H[z_1 x^{\mu_1}(1+x)^{\delta_1},\ldots,z_r x^{\mu_r}(1+x)^{\epsilon_r}]$$

$$=2^{\sigma}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-l)\,\Gamma(l+\alpha+\beta+l)(l+\alpha+\beta+2l)}{\Gamma(l+\beta+l)}\,\frac{(-l)^k\,2^k}{k!}\,P_l^{(\alpha,\beta)}(x)\,x$$

$$H\begin{matrix}0,\ N+3:\{M_i,N_i\}\\ A+3,\ B+3:\{A_i,B\}\end{matrix}\left[\begin{matrix}z_l & 2^{\mu}l\\ \vdots & \\ z_r & \end{matrix}\middle|\begin{matrix}P,\ S:T\\ \\ Q,\ S':T'\end{matrix}\right] \quad (3.2)$$

विस्तार (3.2) में $P$ और $Q$ प्राचालों का समुच्चय है जो निम्न है—

$$P:\{(-\lambda:\mu_l,\ldots,\mu_r),(-\sigma-k:\delta_l,\ldots,\delta_r),(-k-\sigma-\beta:\delta_l,\ldots,\delta_r)\}$$

$$Q:\{(k-\lambda:\mu_l,\ldots,\mu_r)\,(l-\sigma-K:\delta_l,\ldots,\varrho_r),(-l-1-2-\rho:\delta_l,\ldots,\delta_r)\}$$

विस्तार (3.2) जो कि (2.2) में दिये गये प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है, एवं संतुष्ट भी करता है।

**3. प्रसार :** इस अनुभाग का उद्देश्य इसमें (2.1 से (2.4) वाले परिणामों का अनुप्रयोग कर उनको $H\text{-}\{z_t,\ldots,z_r\}$ के रूप में अयिव्यक्त करके चार विख्यात प्रसार सूत्रों की स्थापना करना है।

**प्रथम विस्तार :**

$$x^{\lambda}(1+x)^{\sigma} H[z_1((1+x)/,x)^{\mu}{}_1,\ldots, z_r((1+x)/,x)^{\mu}{}_r]$$

$$=2^{\sigma}\mathop{\Gamma}_{1=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+\beta+1)(1+\alpha+\beta+2l)}{\Gamma(l+\beta+l)}\cdot P_l^{(\alpha,\beta)}(x)\,2^k/,k!\,x$$

$$H^{0,\;N+3:\{M_i,N_i\}}_{A+3,\;B+3:\{A_i,B_i\}}\left[\begin{matrix} z_l & 2\mu_l \\ \vdots & \\ z_r & \end{matrix}\middle|\begin{matrix} V, & S:T \\ & \\ P, & S':T_1\end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

विस्तार (3.1) में $V$ और $P$ प्राचलों का समुच्चय है जो निम्न है—

$$V:\{(1+\lambda-K:\mu_1,\ldots,\mu_r),(-K-\sigma:\mu_1,\ldots,\mu_r),(-\sigma+\beta-k:\mu_l,\ldots,\mu_r)$$

$$P:\{(1+\lambda:\mu_1,\ldots,\mu_r),(-1-\sigma-k:\mu_1,\ldots,\mu_r),(-1-\sigma-\alpha-1=k:\mu_1,\ldots,\mu_r)$$

विस्तार (3.1) में जो कि (2.1) दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है एवं संतुष्ट भी करता है।

**द्वितीय विस्तार :**

$$x^{\lambda}(1+x)^{\sigma} H[z_1 x^{\mu}{}_1(1+x)^{\delta}{}_1,\ldots, z_r x^{\mu_r}(1+x)^{\epsilon_r}]$$

$$=2^{\sigma}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-l)\,\Gamma(l+\alpha+\beta+l)(l+\alpha+\beta+2l)}{\Gamma(l+\beta+l)}\frac{(-l)^k\,2^k}{k!}P_l^{(\alpha,\beta)}(x)\,x$$

$$H^{0,\;N+3:\{M_i,N_i\}}_{A+3,\;B+3:\{A_i,B\}}\left[\begin{matrix} z_l & 2^{\mu}{}_l \\ \vdots & \\ z_r & \end{matrix}\middle|\begin{matrix} P, & S:T \\ & \\ Q, & S':T'\end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

विस्तार (3.2) में $P$ और $Q$ प्राचालों का समुच्चय है जो निम्न है—

$$P:\{(-\lambda:\mu_l,\ldots,\mu_r),(-\sigma-k:\delta_l,\ldots,\delta_r),(-k-\sigma-\beta:\delta_l,\ldots,\delta_r)\}$$

$$Q:\{(k-\lambda:\mu_l,\ldots,\mu_r)\,(l-\sigma-K:\delta_l,\ldots,\varrho_r),(-l-1-2-\rho:\delta_l,\ldots,\delta_r)\}$$

विस्तार (3.2) जो कि (2.2) में दिये गये प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है, एवं संतुष्ट भी करता है।

**3. प्रसार :** इस अनुभाग का उद्देश्य इसमें (2.1 से (2.4) वाले परिणामों का अनुप्रयोग कर उनको $H\text{-}\{z_t,\ldots,z_r\}$ के रूप में अयिव्यक्त करके चार विख्यात प्रसार सूत्रों की स्थापना करना है।

**प्रथम विस्तार :**

$$x^{\lambda}(1+x)^{\sigma} H[z_1((1+x)/,x)^{\mu_1},\ldots,z_r((1+x)/,x)^{\mu_r}]$$

$$=2^{\sigma}\overset{\infty}{\underset{1=0}{\Gamma}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+\beta+1)(1+\alpha+\beta+2l)}{\Gamma(l+\beta+l)}\cdot P_l^{(\alpha,\beta)}(x)\,2^k/,k!\,x$$

$$H\begin{matrix}0,\ N+3:\{M_i,N_i\}\\ A+3,\ B+3:\{A_i,B_i\}\end{matrix}\left[\begin{matrix}z_l & 2\mu_l\\ \vdots & \\ z_r & \end{matrix}\middle|\begin{matrix}V,\ S:T\\ \\ P,\ S':T_1\end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

विस्तार (3.1) में $V$ और $P$ प्राचलों का समुच्चय है जो निम्न है—

$$V:\{(1+\lambda-K:\mu_1,\ldots,\mu_r),(-K-\sigma:\mu_1,\ldots,\mu_r),(-\sigma+\beta-k:\mu_l,\ldots,\mu_r)$$

$$P:\{(1+\lambda:\mu_1,\ldots,\mu_r),(-1-\sigma-k:\mu_1,\ldots,\mu_r),(-1-\sigma-a-1=k:\mu_1,\ldots,\mu_r)$$

विस्तार (3.1) में जो कि (2.1) दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है एवं संतुष्ट भी करता है।

**द्वितीय विस्तार :**

$$x^{\lambda}(1+x)^{\sigma} H[z_1 x^{\mu_1}(1+x)^{\delta_1},\ldots,z_r x^{\mu_r}(1+x)^{\epsilon_r}]$$

$$=2^{\sigma}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-l)\,\Gamma(l+\alpha+\beta+l)(l+\alpha+\beta+2l)}{\Gamma(l+\beta+l)}\frac{(-l)^k\,2^k}{k!}P_l^{(\alpha,\beta)}(x)\,x$$

$$H\begin{matrix}0,\ N+3:\{M_i,N_i\}\\ A+3,\ B+3:\{A_i,B\}\end{matrix}\left[\begin{matrix}z_l & 2^{\mu_l}\\ \vdots & \\ z_r & \end{matrix}\middle|\begin{matrix}P,\ S:T\\ \\ Q,\ S':T'\end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

विस्तार (3.2) में $P$ और $Q$ प्राचालों का समुच्चय है जो निम्न है—

$$P:\{(-\lambda:\mu_l,\ldots,\mu_r),(-\sigma-k:\delta_l,\ldots,\delta_r),(-k-\sigma-\beta:\delta_l,\ldots,\delta_r)\}$$

$$Q:\{(k-\lambda:\mu_l,\ldots,\mu_r)\,(l-\sigma-K:\delta_l,\ldots,\varrho_r),(-l-1-2-\rho:\delta_l,\ldots,\delta_r)\}$$

विस्तार (3.2) जो कि (2.2) में दिये गये प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है, एवं संतुष्ट भी करता है।

**तृतीय विस्तार :**

$$x^{\lambda} (1-x)^{\rho} H[z_l x^{\mu_l} (l-x)^{\delta_l}, \ldots, z_r x^{\mu_r} (l-x)^{\delta_r}]$$

$$=2^{\sigma} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-l)^l \Gamma(\alpha+\beta+l+1)(l+\alpha+\beta+2l)}{\Gamma(l+\alpha+1)} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} P_l^{(\alpha,\beta)}(x)\, x$$

$$H^{0,\; N+3 : \{M_i, N_i\}}_{A+3,\; B+3 : \{A_i, B\}} \left[ \begin{array}{c|c} z_l\; 2^{\mu_l} & P, S : T \\ z_r\; 2^{\mu_r} & Q, S' : T' \end{array} \right] \quad (3.3)$$

विस्तार (3.3) मे $P$ और $Q$ प्राचलों का समुच्चय है जो निम्न है—

$$P : \{-\lambda : \mu_l, \ldots, \mu_r), (k-\rho : \delta_l, \ldots, \delta_r), (-k-\rho-l : \delta_l, \ldots, \delta_r)\}$$

$$Q : \{(k-\lambda : \mu_l, \ldots, \mu_r), (l-\rho-k : \delta_l, \ldots, \delta_t), (1-\alpha-\beta-l-k-\rho : \delta_l, \ldots, \delta_r)\}$$

विस्तार (3.3) जो कि (2.3) में किए गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है एवं संतुष्ट भी करता है।

**चतुर्थ विस्तार :**

$$x^{\lambda} (1-x)^{\rho} H[z_l ((l-x)/,x)^{\mu_l}, \ldots, (l-x)/,x)^{\mu_r}]$$

$$=2^{\rho} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-l)^l \Gamma(l+\alpha=\beta+1)(l+\alpha+\beta+2l)}{\Gamma(1+\alpha+l)} \frac{2^k}{k!} P_l^{(\alpha,\beta)}(x)\, x$$

$$H^{0,\; N+3 : \{M_i, N_i\}}_{A+3,\; B+3 : \{A_i, B_i}} \left[ \begin{array}{c|c} z_l\; 2^{\mu_l} & P, S : T \\ \vdots & \\ z_r\; 2^{\mu_r} & Q, S' : T' \end{array} \right] \quad (3.4)$$

विस्तार (3.4) में $P$ और $Q$ प्राचलों का समुच्चय है जो निम्न है—

$$P : \{l+\lambda-k : \mu_l, \ldots, \mu_r), (p-k : \mu_l, \ldots, \mu_r), (\rho-\alpha-k : \mu_l, \ldots, \mu_r)\}$$

$$V : \{(l+\lambda : \mu_l, \ldots, \mu_r), (l-k-p : \mu_l, \ldots, \mu_r), (l-\rho-\alpha-k-\beta-l\; \mu_l, \ldots, \mu_r)\}$$

विस्तार (3.4) जो (2.4) मे दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है एवं संतुष्ट भी करता है।

**उपपत्ति** : विस्तार (3.1) का मान ज्ञात करने लिये, माना कि,

$$x^{\lambda} (l+x)^{\sigma} H[z_l ((l+x)/,x)^{\mu_l}, \ldots, z_r ((l+x)/,x)^{\mu_r}]$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty} M_l P_l^{(\alpha,\beta)}(x). \quad (3.5)$$

जहाँ $M_1$ एक अचर है जिसे ज्ञात करना है। इसे ज्ञात करने के लिये हम (3.5) के दोनों पक्षों में $(1-x)^{\alpha}\ (1-x)^{\beta}\ P_l^{(\alpha,\beta)}(x)$ से गुणा करते हैं और $-1$ से $+1$ सीमाओं के भीतर समाकलित करते हैं। अन्त में वाम पक्ष में परिणाम (2.1) के पुनः विचार तथा दक्षिण पक्ष में जैकोबी बहुपदों के लाम्बिकता गुण के प्रयोग करने से वांछित परिणाम प्राप्त होता है। [3, P. 285(5) और (9)]

$$M_v=\frac{(-1)^n\, 2^{\sigma}\, (l+\alpha+\beta+n)\ \Gamma(l+a+2n+\alpha)}{\Gamma(1+\beta+l)}\times$$

$$H\begin{matrix} 0,\ \ N+3:\{M_i,N_i\} \\ A+3,\ B+3:\{A_i,B\}\end{matrix}\left[\begin{matrix} z & 2^{\mu_l} \\ \vdots & \\ z_r & 2^{\mu_r}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} P,S:T \\ \\ Q,S':T'\end{matrix}\right] \tag{3.6}$$

जहाँ $P, Q$ प्राचलों का सचमुच्चय है जो निम्न है—

$$P=\{1+\lambda-K:\mu_l,\ldots,\mu_r),(\beta-l-\sigma:\mu_l,\ldots,\mu_r),(-\sigma-K:\mu_l,\ldots,\mu_r)\}$$

$$Q=\{1+\lambda:\mu_l,\ldots,\mu_r),(\beta-l-\sigma:\mu_l,\ldots,\mu_r),(-1-\sigma-l-k:\mu_l,\ldots,\mu_r)\}$$

$M_l$ का मान (3.6) से प्राप्त कर (3.5) में रखने पर हमें विस्तार (3.1) प्राप्त होता है।

इसी प्रकार अन्य परिणामों कि उपपत्ति भी ज्ञात कर सकते हैं।

4. **विशिष्ट दशाएँ** : इस अनुभाग में कतिपय प्राप्त विस्तारों को ज्ञात किया गया है।

(अ) यदि प्रथम, द्वितीय, तृतीय और चतुर्थ विस्तारों में $r=2$ रखें तो हमें आनन्दानी तथा सिंह[1] के परिणाम प्राप्त होंगे।

(ब) यदि पुनः प्रथम, द्वितीय, तृतीय और चतुर्थ विस्तारों में $r=2$ रखे तो लेखक के पुराने परिणामों की प्राप्ति होगी[6]।

## कृतज्ञता ज्ञापन

सहाय्य एवं निर्देश के लिये लेखक डॉ॰ आर॰ डी॰ अग्रवाल, एस॰ ए॰ टी॰ आई॰ गणित विभाग के प्रति आभार व्यक्त करता है।

## निर्देश

1. आनन्दानी, पी॰ तथा सिंह, नाम प्रसाद, Gomment. Math. Univ. St. Pauli. 1979, **28**. 163-167.

जहाँ $M_1$ एक अचर है जिसे ज्ञात करना है। इसे ज्ञात करने के लिये हम (3.5) के दोनों पक्षों में $(1-x)^{\alpha}\,(1-x)^{\beta}\;P_l^{(\alpha,\beta)}(x)$ से गुणा करते हैं और $-1$ से $+1$ सीमाओं के भीतर समाकलित करते हैं। अन्त में वाम पक्ष में परिणाम (2.1) के पुनः विचार तथा दक्षिण पक्ष में जैकोबी बहुपदों के लाम्बिकता गुण के प्रयोग करने से वांछित परिणाम प्राप्त होता है। [3, P. 285(5) और (9)]

$$M_v=\frac{(-1)^n\, 2^{\sigma}\,(l+a+\beta+n)\,\Gamma(l+a+2n+\alpha)}{\Gamma(1+\beta+l)}\times$$

$$H\begin{array}{c}0,\; N+3:\{M_i,N_i\}\\ A+3,\; B+3:\{A_i,B\}\end{array}\left[\begin{array}{cc|c} z & 2^{\mu_l} & P,S:T\\ \vdots & & \\ z_r & 2^{\mu_r} & Q,S':T'\end{array}\right] \tag{3.6}$$

जहाँ $P, Q$ प्राचलों का सचमुच्चय है जो निम्न है—

$$P=\{1+\lambda-K:\mu_l,\ldots,\mu_r),(\beta-l-\sigma:\mu_l,\ldots,\mu_r),(-\sigma-K:\mu_l,\ldots,\mu_r)\}$$

$$Q=\{1+\lambda:\mu_l,\ldots,\mu_r),(\beta-l-\sigma:\mu_l,\ldots,\mu_r),(-1-\sigma-l-k:\mu_l,\ldots,\mu_r)\}$$

$M_l$ का मान (3.6) से प्राप्त कर (3.5) में रखने पर हमें विस्तार (3.1) प्राप्त होता है।

इसी प्रकार अन्य परिणामों कि उपपत्ति भी ज्ञात कर सकते हैं।

4. **विशिष्ट दशाएँ** : इस अनुभाग में कतिपय प्राप्त विस्तारों को ज्ञात किया गया है।

(अ) यदि प्रथम, द्वितीय, तृतीय और चतुर्थ विस्तारों में $r=2$ रखें तो हमें आनन्दानी तथा सिंह[1] के परिणाम प्राप्त होंगे।

(ब) यदि पुनः प्रथम, द्वितीय, तृतीय और चतुर्थ विस्तारों में $r=2$ रखे तो लेखक के पुराने परिणामों की प्राप्ति होगी[6]।

## कृतज्ञता ज्ञापन

सहाय्य एवं निर्देश के लिये लेखक डॉ० आर० डी० अग्रवाल, एस० ए० टी० आई० गणित **विभाग के प्रति आभार व्यक्त करता है।**

## निर्देश

1. आनन्दानी, पी० तथा सिंह, नाम प्रसाद , Gomment. Math. Univ. St. Pauli. 1979, **28.** 163-167.

2. कारसलॉ, एच० एस०, Introduction to theory of Fourier series and Integrals, डोवर पब्लिकेशन न्यूयार्क, 1950.

3. एर्डल्यी, ए इत्यादि' Tables of Integral Transforms. भाग 2, मैकग्राहिक, न्यूयार्क, 1954,

4. गोयल, एस. पी., Pure and Applied Mathematic-Ka Sci. 1978, 8. 19-28.

5. गर्ग, आर. एस., Pure and Applied Mathematic-Ka Sci. 1979, 10, 31-36.

6. रोंघे, ए. के., Vijna. Pari. Patrika. 1985, **28**, 387-393.

7. सक्सेना, आर. के., Kyngpook. Math. J. 17.

8. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी०, , The H-Function of One and Two variables with Application. साउथ-एशियन पब्लिशर्स नई दिल्ली तथा मद्रास : 1982,

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 2, 1994

# बहुचरीय फलन के लिए I-फलन

आर० के० सक्सेना तथा यशवन्त सिंह
गणित तथा सांख्यकीय विभाग, जयनारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर

[ प्राप्त—जुलाई 13, 1992 ]

## सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में प्रसाद[5] द्वारा प्रवर्तित बहुचरीय I-फलन के लिए दो सान्त प्रसार प्राप्त किये गये हैं। मुख्य परिणाम की विशिष्ट दशाएँ भी प्राप्त की गई हैं[3]।

## Abstract

**Two finite expansions for multivariable I-function.** *By* R. K. Saxena and Yashwant Singh, Department of Mathematics and Statistics, Jai Narain Vyas University, Jodhpur-342001.

In the present paper we obtain two finite expansions for the multivariable I-function introduced by Prasad[5]. Since the multivariable H-function, Fox's H-function etc. are the special cases of the multivariable I-function, the expansions for these functions follow as special cases of our main result. The results given earlier by Olkha[3] are derived as special cases.

## 1. विषय प्रवेश

निम्नलिखित परिणामों की हमें आवश्यकता पड़ेगी। पठान[4] ने व्हिटेकर फलनों के लिये निम्नलिखित आवर्ती सम्बन्ध दिये हैं।

$$\sum_{n=0}^{s} (-1)^{s-n}\, {}^{s}C_n\, x^{(s-n)/2}\, W_{v+n/2,\, \mu+n/2}(x) = \frac{\Gamma(\mu+s-v+1/2)}{\Gamma(\mu-v+1/2)}\, W_{v-s/2,\, \mu-s/2}(x) \tag{1.1}$$

$$\sum_{n=0}^{s} (-1)^{s-n}\, {}^sC_n \frac{\Gamma(\mu-\nu-n+1/2)}{\Gamma(\mu-\nu-s+1/2)} W_{\nu+n,\,\mu}(x) = x^{s/2}\, W_{\nu+s/2,\,\mu-s/2}(x) \tag{1.2}$$

इससे आगे $M, N, P_1, P_2, Q_1, Q_2$ संकेतों का निम्नलिखित अर्थ होगा

$$M=(m', n');\ldots;(m^{(r)}, n^{(r)}, N=(p', q');\ldots;(p^{(r)}, q^{(r)});$$

$$P_1=\left(a_{2j};\alpha'_{2j},\alpha''_{2j}\right)_{1,p_2};\ldots;\left(a_{rj};\alpha'_{rj};\ldots;\alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1,pr};$$

$$Q_1=\left(b_{2j};\beta'_{2j},\beta''_{2j}\right)_{1,q_2};\ldots;\left(b_{rj};\beta'_{rj},\ldots,\beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r};$$

$$P_2=\left(a'_j,\alpha'_j\right)_{1,p'};\ldots;\left(a^{(r)}_j,\alpha^{(r)}_j\right)_{1,p^{(r)}}$$

$$Q_2=\left(b'_j,\beta'_j\right)_{1,q'};\ldots;\left(b^{(r)}_j,\beta^{(r)}_j\right)_{1,q^{(r)}}$$

सक्सेना तथा रावत[6] ने निम्नलिखित परिणाम सिद्ध किया है

$$\int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-t/2} W_{\lambda,\mu}(t)\, s_\delta^\gamma(xt^k)\, I[t^\rho z_1, \ldots, t^\rho z_r]\, dt$$

$$=e^{-\nu-ku} \sum_{u=0}^{[\delta/\gamma]} \frac{(-\delta)_{\gamma u}}{u!} A_{\delta,u}(x)^u\, I^{o,\,n_2;\ldots;\,o,\,n_r+2\,:\,M}_{p_2,\,q_2;\ldots;\,p_r+2,\,q_r+2\,:\,M}\left[\begin{matrix} z_1/c^\rho \\ \vdots \\ z_r/c^\rho \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} P_1 : (\tfrac{1}{2}-\nu-\mu-ku;\rho) : (\tfrac{1}{2}+\mu-\nu-ku;\rho) : P_2 \\ Q_1 : (\lambda-\mu-ku;\rho) \qquad\qquad : Q_2 \end{matrix}\right] \tag{1.3}$$

जहाँ

$$Re(c)>0,\; Re\left(\nu\pm\mu+\tfrac{1}{2}+\rho\sum_{i=1}^{r}\frac{b_j^{(i)}}{\beta_j^{(i)}}\right)>0,$$

$$j=1,\ldots,m_i;\; i=1,\ldots,r;\; |\arg z_i| < \tfrac{1}{2}\pi U_i,\; U_i>0$$

तथा $U_i$ निम्नलिखित मात्राओं के लिए आया है—

$$U_i = \sum_{j=1}^{n^{(i)}} \alpha_j^{(i)} - \sum_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}} \alpha_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m^{(i)}} \beta_j^{(i)} - \sum_{j=m^{(i)}+1}^{q^{(i)}} \beta_j^{(i)}$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{2j}^{(i)} - \sum_{j=n_2+1}^{p_2} \alpha_{2j}^{(i)}\right) + \left(\sum_{j=1}^{n_3} \alpha_{3j}^{(i)} - \sum_{j=n_3+1}^{p_3} \alpha_{3j}^{(i)}\right)$$

$$+\ldots+\left(\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_{rj}^{(i)} - \sum_{j=n_r+1}^{p_r} \alpha_{rj}^{(i)}\right) - \left(\sum_{j=1}^{q_2} \beta_{2j}^{(i)} + \sum_{j=1}^{q_3} \beta_{3j}^{(i)}\right.$$

$$\left. +\ldots+ \sum_{j=1}^{q_r} \beta_{rj}^{(i)} \right) \tag{1.4}$$

(1.3) में आया बहुचरीय $I$-फलन प्रसाद[5] द्वारा प्रवर्तित किया गया।

यदि (1.3) में $e=1, \delta=0, k=0, \rho=\rho_1, \ldots, \rho=\rho_r$ रखें तो

$$\int_0^\infty t^{v-1} e^{-t/2} W_{\lambda, \mu}(t)\, I[t^{\rho_1} z_1, \ldots, t^{\rho_r} z_r]\, dt$$

$$= I^{0, n_2 : \ldots : 0, n_r+2 : M}_{p_2, q_2 : \ldots : p_r+2, q_r+2 : N} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_1 : (\tfrac{1}{2}-v-\mu; \rho_1, \ldots, \rho_r) \\ Q_1 : (\lambda-\mu; \rho_1, \ldots, \rho_r) \end{matrix}\right.$$

$$\left. \begin{matrix} : (\tfrac{1}{2}+\mu-v; \rho_1, \ldots, \rho_r) : P_2 \\ : Q_2 \end{matrix} \right] \tag{1.5}$$

इस टिप्पणी में हम बहुचरीय $I$-फलन के लिए दो सान्त प्रसारों को पठान के परिणामों (1.1) तथा (1.2) की सहायता से प्राप्त करेंगे। यह परिणाम नवीन प्रतीत होता है।

## 2. प्रसार

निम्नलिखित प्रसारों को यहाँ सिद्ध किया जायेगा—

(i) $$\sum_{n=0}^{s} (-1)^{s-n}\, {}^sC_n\; I^{0, n_2 : \ldots : 0, n_r : M}_{p_2, q_2 : \ldots : p_r, q_r : N} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} R : (a_{r1}-s/2+n; \\ K : (b_{rj}; \beta'_{rj}, \ldots \beta^{(r)}_{rj})_{1, q_r-1} \end{matrix}\right.$$

$$\alpha'_{r1}, \ldots, \alpha^{(r)}_{r1}\Big) : \Big(a_{r2}-s/2;\ \alpha'_{r1}, \ldots, \alpha^{(r)}_{r1}\Big) :$$

$$: \Big(b_{rq_r}-s/2+n;\ \alpha'_{r1}, \ldots, \alpha^{(r)}_{r1}\Big) :$$

$$: \Big(a_{rj};\ \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj}\Big)_{3,\, p_r} : P_2 \quad : Q_2 \Bigg]$$

$$=(a_{r1}-b_{rq_r})_s\ I^{0,\, n_2\, :\, \ldots\, :\, 0,\, n_r\, :\, M}_{p_2,\, q_2\, :\, \ldots\, :\, p_r,\, q_r\, :\, N} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} \begin{matrix} R : (a_{r1}+s/2;\ \alpha'_{r1}, \ldots, \alpha^{(r)}_{r1}) \\ K : (b_{rj};\ \beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{rj})_{1,\, q_{r-1}} \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} : \Big(a_{r2}-s/2;\ \alpha'_{r1}, \ldots, \alpha^{(r)}_{r1}\Big) : \Big(a_{rj};\ \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj}\Big)_{3,\, p_r} : P_2 \\ : \Big(b_{rq_r}-s/2;\ \alpha'_{r1}, \ldots, \alpha^{(r)}_{r1}\Big) \qquad : Q_2 \end{matrix}\right] \tag{2.1}$$

जहाँ $n_r \geqslant 2$, $q_r \geqslant 2$;

$$R=\Big(a_{2j};\ \alpha'_{2j}, \alpha''_{2j}\Big)_{1,\, p_2} :\ldots: \Big(a_{(r-1)j};\ \alpha'_{(r-1)j}, \ldots, \alpha^{(r-1)}_{(r-1)}\Big)_{1,\, p_{r-1}} \tag{2.2}$$

$$K=\Big(b_{2j};\ \beta'_{2j}, \beta''_{2j}\Big)_{1,\, q_2} :\ldots: \Big(b_{(r-1)j}, \ldots, \beta'_{(r-1)j}, \ldots, \beta^{(r-1)}_{(r-1)j}\Big)_{1,\, q_{r-1}} \tag{2.3}$$

(ii) $$\sum_{n=0}^{s} (-1)^{s-n}\ {}^sC_n \frac{(a_{r1}-b_{rq_r}-n)}{(a_{r1}-b_{rq_r}-s)}\ I^{o,\, n_2\, :\, \ldots\, :\, o,\, n_r\, :\, M}_{p_2,\, q_2\, :\, \ldots\, :\, p_r,\, q_r\, :\, N} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R : \\ K : \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \Big(a_{r1};\ \alpha'_{r1}, \ldots, \alpha^{(r)}_{r1}\Big) : \Big(a_{r2};\ \alpha'_{r2}, \ldots, \alpha^{(r)}_{r2}\Big) : \Big(a_{rj};\ \alpha'_{rj}, \alpha^{(r)}_{rj}\Big) : P_2 \\ \Big(b_{rj};\ \beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{rj}\Big)_{1,\, q_{r-1}} : \Big(b_{rq_r};\ \alpha'_{r1}, \ldots, \alpha^{(r)}_{r1} \qquad : Q_2 \end{matrix}\right]$$

$$=I^{o,\, n_2\, :\, \ldots\, :\, o,\, n_r\, ;\, M}_{p_2,\, q_2\, :\, \ldots\, :\, p_r,\, q_r\, :\, N} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} \begin{matrix} R : \Big(a_{r1}-s;\ \alpha'_{r1}, \ldots, \alpha^{(r)}_{r1} \\ K : \Big(b_{rj};\ \beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{rj}\Big)_{1,\, q_{r-1}} \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} : \Big(a_{r2};\ \alpha'_{r1}, \ldots, \alpha^{(r)}_{r1}\Big) : P_2 \\ : \Big(b_{rq_r};\ \alpha'_{r1}, \ldots, \alpha^{(r)}_{r1}\Big) : Q_2 \end{matrix}\right] \tag{2.4}$$

जहाँ $n_r \geqslant 2$, $q_r \geqslant 2$.

**उपपत्ति**

(1·1) के दोनों पक्षों में $f(x)$ से गुणा करगे, 0 से $\infty$ तक $x$ के प्रति समाकलन करने तथा समाकलन एवं संकलन के क्रम को परस्पर बदल देने पर, जो कि वैध है, हमें निम्नलिखित परिणाम मिलता है

$$\sum_{n=0}^{s} (-1)^{s-n}\, {}^{s}C_n \int_0^\infty x^{(s-n)/2}\, W_{\nu+n/2,\, \mu+n/2}(x) f(x)\, dx$$

$$=\frac{\Gamma(\mu+s-\nu+1/2)}{\Gamma(\mu-\nu+1/2)} \int_0^\infty W_{\nu-s/2,\, \mu+s/2}(x)\, f(x)\, dx \tag{2.5}$$

अब (2·5) में

$$f(x)=e^{-x/2}\, I^{o,\, n_2\, :\, \ldots\, :\, o,\, n_r\, :\, M}_{p_2,\, q_2\, :\, \ldots\, :\, p_r,\, q_r\, :\, N} \left[\begin{matrix} z_1 x^{\sigma_1} \\ \vdots \\ z_r x^{\sigma_r} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P_1 : P_2 \\ \\ Q_1 : Q_2 \end{matrix}\right]$$

लेकर तथा परिणाम (1·3) को व्यवहृत करके हमें परिणाम (2·1) प्राप्त होता है। परिणाम (2.4) को (1.1) के स्थान पर (1.2) को लेकर और इसी तरह अग्रसर होते हुए सिद्ध किया जा सकता है।

## 2. रोचक विशिष्ट दशाएँ

(i) (2·1) तथा (2·4) में $n_2=n_3=\ldots=n_{r-1}=0=p_2=p_3=\ldots=p_{r-1}$ एवं $q_2=q_3=\ldots=q_{r-1}=0$ रखने पर हमें बहुचरीय $I$-फलन के लिए श्रीवास्तव तथा पण्डा[8] के प्रसार प्राप्त होते हैं।

$$\sum_{n=0}^{s} (-1)^{s-n}\, {}^{s}C_n\, H^{o,\, n\, :\, M}_{p,\, q\, :\, N} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left(a_1-s/2+n;\, \alpha'_1, \ldots, \alpha_1^{(r)}\right) \\ \\ \left(b_j;\, \beta'_j, \ldots, \beta_j^{(r)}\right)_{1,\, q-1} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} :\left(a_2-s/2;\; \alpha'_1, \ldots, \alpha_1^{(r)}\right) : \left(a_j;\; \alpha'_j, \ldots, \alpha_j^{(r)}\right)_{2,\, p} : P_2 \\ :\left(b_q;\; \alpha'_1, \ldots, \alpha_1^{(r)}\right) \qquad\qquad : P_2 \end{matrix}\right]$$

$$=(a_1-b_q)_s\, H^{o,\,n\,:\,M}_{p,\,q\,:\,N}\left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix}\middle|\begin{matrix}\left(a_1+s/2;\ \alpha_j',\ldots,\alpha_1^{(r)}\right):\left(a_2-s/2;\ \alpha_1',\ldots,\alpha_1^{(r)}\right) \\ \\ \left(b_j;\ \beta_j',\ldots,\beta_j^{(s)}\right)_{1,\,q-1}\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}:\left(a_j;\ \alpha_j',\ldots,\alpha_j^{(r)}\right)_{3,\,p}:P_2 \\ \\ :\left(b_j,\ \alpha_1',\ldots,\alpha_1^{(r)}\right)\quad :Q_2\end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

जहाँ $n \geqslant 2,\ q \geqslant 2$.

(ii) $$\sum_{n=0}^{s}(-1)^{s-n}\,{}^sC_n\frac{(a_1-b_q-n)}{(a_1-b_q-s)}H^{o,\,n\,:\,M}_{p,\,q\,:\,N}\left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix}\middle|\begin{matrix}\left(a_1;\ \alpha_1',\ldots,\alpha_1^{(r)}\right) \\ \\ \left(b_j;\ \beta_j',\ldots,\beta_j^{(r)}\right)_{1,\,q-1}\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}:\left(a_2;\ \alpha_1',\ldots,\alpha_1^{(r)}\right):\left(a_j;\ \alpha_j',\ldots,\alpha_j^{(r)}\right)_{2,\,p}:P_2 \\ \\ :\left(b_q,\ \alpha_1',\ldots,\alpha_1^{(r)}\right)\qquad :Q_2\end{matrix}\right]$$

$$=H^{o,\,n\,:\,M}_{p,\,q\,:\,N}\left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix}\middle|\begin{matrix}\left(a_1-s;\ \alpha_1',\ldots,\alpha_1^{(r)}\right):\left(a_2;\ \alpha_1',\ldots,\alpha_1^{(r)}\right) \\ \\ \left(b_j;\ \beta_j',\ldots,\beta_j^{(r)}\right)_{1,\,q-1}:\left(b_q;\ \alpha_1',\ldots,\alpha_1^{(r)}\right)\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}:\left(a_j;\ \alpha_j',\ldots,\alpha_j^{(r)}\right)_{3,\,p}:P_2 \\ \\ :Q_2\end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

जहाँ $n_2 \geqslant 0,\ q \geqslant 2$.

## निर्देश


1. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc., 1961, 98, 408
2. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, The *H*-function with applications in Statistic, and other Disciplines, जान विले एण्ड सन्स न्यूयार्क, 1978

3. ओल्खा, जी० एस०, Indian J. Pure Appl. Math., 1970, **2**, 425-429

4. पठान, ए० एम०, Proc. Cambridge Phil. Soc. 1968, **64**, 1045-49

5. प्रसाद, वाई० एन०, विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1986, **29**, 231-235

6. सक्सेना, आर० के० तथा रामावन, ए०, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका (प्रकाशनार्थ प्रेषित)

7. सक्सेना, आर० के०, Kyungpook Math. J., 1974, **14**, 255-259

8. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पण्डा, आर०, J. Reine Angew. Math. 1976, **288**, 129-145

9. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा सिंह, एन० पी०, Rend. Circ. Math. Palermo, 1983, **32**(2), 157-187.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol, 37, No. 2, 1994

# शारीरिक मानव विज्ञान : उपयोगिता एवं विशेषताएँ

**चतुर्भुज साहु**

**मानव विज्ञान विभाग, गिरिडीह कॉलेज, गिरिडीह (बिहार)**

[ प्राप्त—अक्टूबर 14, 1993 ]

## सारांश

मानव विज्ञान की शाखाओं में से शारीरिक मानव विज्ञान एक महत्वपूर्ण शाखा है। इसके अन्तर्गत मानव के शारीरिक लक्षणों, जैविक रूप तथा विभिन्नताओं का अध्ययन उस समय के मानव से किया जाता हैं जब से मानव इस पृथ्वी पर उपन्न हुए। प्रस्तुत अध्ययन में मानव की उत्पत्ति एवं विकास, शारीरिक मानव विज्ञान की उपयोगिता एवं मानव की यात्रा आदि पर विशेष प्रकाश डाला गया है।

मानव हुमिनीडी वंश के अन्तर्गत आता है। इस वंश में केवल तीन जीनस-रामापिथेकस, आस्ट्रेलोपिथेकस एवं होमो आते हैं। मानव की की उत्पत्ति एवं विकास पर विचार करने से यह पता ही नहीं चलता है कि मानव का विकास किस अस्थि-पंजर से हुआ है। इसलिए विकासवादियों ने इसे 'लुप्त कड़ी' कहा है। वैसे सभी प्रस्तरित मानव वर्तमान मानव के पूर्वज होने के दावा करते हैं परन्तु लुप्त कड़ी की समस्या हल नहीं हो पा रही है।

रामापिथेकस एवं आस्ट्रेलोपिथेकस की क्रेनियल धारिता 450 से 600 मिली० तक पायी गयी है। पिथेकेन्थ्रोपस में 960 तथा नियेनडरथल में 1600 मिली० है जो आधुनिक मानव के बराबर है। अतः क्रेनियल धारिता के क्रमिक विकास से ठोस निर्णय लिया जा रहा है।

अध्ययन के क्रम में यह पाया गया है कि आज से लगभग 3.5 मिलियन वर्ष पूर्व मानव ने दो पैरों से चलना प्रारम्भ किया और लगभग 2.5 मिलियन वर्ष पूर्व होमो सेपियन्स का प्रादुर्भाव हुआ।

आज मानव विज्ञान की विशेषता एवं उपयोगिता को देखते हुए देश के 30 विश्वविद्यालयों में मानव विज्ञान की पढ़ाई स्नातकोत्तर स्तर पर हो रही है।

**Abstract**

**Physical Anthropology : Its significance and uses.** *By* Chaturbhuj Sahu, Department of Anthropology, Giridih College, Giridih, Bihar.

Physical Anthropology is one of the main branches of anthropology. It deals with the origin, evolution and present state of physical characteristics of man. It is scientific field of study and is concerned with many and varied aspects of human biology and evolutionary origin of human species.

In the present paper emphasis has been given an origin and evolution of man, application of physical anthropology and human journey. In evolutionary tree there is a 'missing link' which is the subject matter for further research.

Bipedal mode of walking gave freedom to hand and development of cranial capacity. It is ranging from 450 cc to 1600 cc in the genus of Hominidae family. Making of deliberately shaped tools some 2.5 million years ago, signifying the arrival of genus Homo, who ultimately spread over Africa, Europe and Asia. After becoming the producer of food, some 12,000 years ago, the man in his long arduous journey had time to pause and relax.


**मानव विज्ञान** (Anthropology) मानव का ही अध्ययन करने वाला विज्ञान है । इस विज्ञान से मानव के दो मुख्य पहलुओं का अध्ययन किया जाता है—जैविक तथा सामाजिक (या सांस्कृतिक) । ये दोनों पहलू एक दूसरे के पूरक हैं । सामाजिक मानव विज्ञान मानव के सामाजिक तथा सांस्कृतिक पहलुओं से सम्बन्धित है तथा शारीरिक मानव विज्ञान (जैविक) मानव के शारीरिक लक्षणों, जैविक रूप तथा विभिन्नताओं को समझने का प्रयत्न करता है । मानव जब से पृथ्वी पर आया उस समय से आज तक उसके रूप में जो परिवर्तन हुए उन सभी का अध्ययन क्षेत्र मानव विज्ञान का है । यही एक ऐसा विज्ञान है जो प्रथम आँकड़े एकत्र करता है ।

मानव विज्ञान को मुख्यत: दो भागों में बाँटा जाता है—**शारीरिक मानव विज्ञान और सामाजिक या सांस्कृतिक मानव विज्ञान** । शारीरिक मानव विज्ञान में मनुष्य के भौतिक पहलू का अध्ययन किया जाता है । जैसे—मनुष्य का शरीर कब बना, कैसे बना, उसके रक्त में कौन से तत्व हैं जो दूसरे प्राणियों में नहीं हैं, कौन से शारीरिक गुण संतति में संक्रान्त हैं, कौन से नहीं होते, पर्यावरण का मनुष्य की शारीरिक भिन्नताओं पर क्या प्रभाव पड़ता है, एक ही रक्त के लोगों के पारस्परिक सम्बन्ध से प्रजातियों में क्या भेद पड़ जाता है, प्रजाति-भेद क्या है, भिन्न-भिन्न प्रजातियों के सम्मिश्रण से उनमें कौन-कौन शारीरिक तथा मानसिक अन्तर आ जाते हैं आदि-आदि । सामाजिक मानव विज्ञान में मनुष्य के आर्थिक, राजनैतिक, धार्मिक संगठनों आदि का अध्ययन किया जाता है (सिद्धांतालंकार[1]) ।

मानव का जैविक अध्ययन

| ऐतिहासिक दृष्टिकोण के आधार पर | वैज्ञानिक दृष्टिकोण के आधार पर |
|---|---|
| जैविक विकास-मानव की उत्पत्ति एवं विकास | फिजिकल एन्थ्रोपॉलोजी |
| पैलियो-बोटनी | ह्यूमेन जेनेटिक्स |
| पैलियो-एन्थ्रोपोलॉजी | मेडिकल साइंस |
| रेसियल हिस्ट्री | पेडिग्री अध्ययन |
| ↑ मानव विज्ञान ↓ | |
| फोकलोर, फोकटेल | सोसल एन्थ्रोपोलॉजी |
| प्रिहिस्टोरिक आरक्रियोलॉजी | अप्लाइड एण्ड एक्सन एन्थ्रोपोलॉजी |
| इथनोलॉजी | इथनोलिंग्विस्टिक |
| हिस्टोरिकल लिंग्विस्टिक | सोसियोलॉजी |
| आरकियोलॉजी | साइकोलॉजी, पोलिटिकल एन्थ्रोपोलॉजी |
| एन्सियेन्ट हिस्ट्री | ह्यूमेन जियोग्राफी |
| कल्चरल एण्ड सोसल हिस्ट्री | डेमोग्राफी, न्युट्रिसन, क्रिम्नोलॉजी |
| फिलॉसोफी | स्टेटिसटिक्स, इंडस्ट्रियल एन्थ्रोपोलॉजी |
| आदि | इकोनोमिक एन्थ्रोपोलॉजी |
| | मैनेजेरियल एन्थ्रोपोलॉजी |

मानव का सांस्कृतिक अध्ययन

मानव का समग्र अध्ययन ही मानव विज्ञान है।

प्रस्तुत चित्र में मानव विज्ञान को सर्वप्रथम दो भागों में बांटा गया है—मानव का जैविक अध्ययन तथा मानव का सांस्कृतिक अध्ययन। इन दोनों भागों को ऐतिहासिक दृष्टिकोण के आधार पर तथा वैज्ञानिक दृष्टिकोण के आधार पर भी बांटा गया है जिससे मानव विज्ञान चार भागों में वर्गीकृत हो जाता है। प्रथम खण्ड के अन्तर्गत मानव के शारीरिक पहलू का ऐतिहासिक अध्ययन किया जाता है जिसमें मानव की उत्पत्ति एवं विकास, पैलियो-बोटनी, पैलियो एन्थ्रोपोलॉजी एवं रेसियल हिस्ट्री आदि लक्षण आते हैं। दूसरे खण्ड में मानव के शारीरिक लक्षणों का वैज्ञानिक दृष्टिकोण से अध्ययन किया जाता है। शारीरिक मानव वैज्ञानिकों ने आधुनिक खोजों के आधार पर इस विषय को विभिन्न क्षेत्रों में ला दिया है।

तीसरे और चौथे खण्डों में मानव के द्वारा किये गये कार्यों का ऐतिहासिक और वैज्ञानिक दोनों ही दृष्टि से अध्ययन किया जाता है। तीसरे खण्ड में आदि-मानवों के कार्यों तथा उनसे सम्बन्धित तथ्यों पर विशेष बल दिया जाता है जबकि चौथे खण्ड में सांस्कृतिक मानव विज्ञान के विस्तृत क्षेत्र को दर्शाया गया है।

प्रस्तुत अध्ययन में शारीरिक मानव विज्ञान से सम्बन्धित विभिन्न क्षेत्रों पर प्रकाश डालने का प्रयास किया गया है। साथ ही साथ मानव की उत्पत्ति एवं विकास, शारीरिक मानव विज्ञान की उपयोगिता एवं मानव की यात्रा से सम्बन्धित विषयों पर विशेष बल दिया गया है।

**मानव की उत्पत्ति एवं विकास**

मानव की उत्पत्ति के सम्बन्ध में 15वीं शताब्दी तक धार्मिक धारणायें ही प्रबल थीं परन्तु 15वीं शताब्दी के अन्तिम चरणों में गणित तथा ज्योतिष के फैलते हुए ज्ञान ने वास्तविकता को अधिक प्रोत्साहन दिया। विलियन हार्वे (1578-1657) ने यह प्रमाणित किया कि शरीर की नाड़ियों में रक्त प्रवाहित होता है तथा जान रे (1627-1705) ने जीवों के अनेक प्रकारों पर एक वृहत संस्करण प्रस्तुत किया। 18वीं शताब्दी में (1707-1778) लिनिअस ने सारे जीवों को समुचित वर्गों में विभाजित करने का प्रयत्न किया। इसी शताब्दी में कुछ लोगों का मत था कि मानव समूहों का उद्गम एक ही (monogenesis) है तथा दूसरे मत के अनुसार उनके स्रोत विभिन्न (polygenesis) हैं। नवीन खोजों के परिणामस्वरूप यह अनुभव किया जाने लगा कि निरन्तर विकास की ओर उन्मुख प्राणियों में क्या-क्या परिवर्तन हुए।

ब्लुमन बॉख ने पंचवर्षीय, बुफा ने छः, हन्टर ने सात, आगासी ने आठ, पिकरिंग ने ग्यारह, बोरीसेन्ट विसेन्ट ने पन्द्रह, टेस्यूलिन्स ने सोलह, मार्टन ने बाइस, क्राफर्ड ने साठ तथा वर्क तिरसठ मानव समूहों को अपने-अपने ढंग से वर्गीकृत किया है (रिपुदमन[2])। नित्य नवीन खोजों ने एवं विभिन्न जीवाश्म अवशेषों के द्वारा यह आशा की जा रही थी कि अब मानव के पूर्वजों के विषय में बहुत कुछ जाना जा सकेगा। इसलिए अब लोगों ने अपना ध्यान मानव की मुख्य शारीरिक संरचना, उसके अंग, आकार-प्रकार तथा कार्यकलाप किन जीवों से अधिक साम्य रखते हैं आदि की ओर केन्द्रित किया और यह देखा जाने लगा कि किन अंगों या अवयवों में साधारण स्थिति से किस प्रकार का परिवर्तन हुआ तथा कार्य, वातावरण व जीवन के अनुकूल उनमें क्या विकास हुआ।

यह सत्य है कि मानव भी एक पशु है लेकिन अपनी शारीरिक संरचना, दिव्य दृष्टि एवं तीक्ष्ण बुद्धि के कारण वह अन्य सभी प्राणियों से श्रेष्ठ है और प्राणि जगत में उसका स्थान सर्वोपरि है। विकास की दृष्टि से हम पाते हैं कि सर्वप्रथम अजीव युग से जीव युग आया जिसमें एककोशीय जीव उत्पन्न हुए। इन जीवों से बहुकोशीय जीव बने जिन्हें दो मुख्य फाइलम में बाँटा गया—अपृष्टवंशी अर्थात् बिना रीढ़ की हड्डी वाले जीव तथा पृष्ठवंशी (रीढ़ की हड्डी वाले जीव)। रीढ़ की हड्डी वाले जीव उच्च कोटि के जीव थे : इन्हें मत्स्य, उभयचर, सरीसृप, पक्षी एवं स्तनधारी वर्गों में विभक्त किया गया। स्तनधारी प्राणियों को तीन उप-वर्गों—प्रोटोथेरिया, मेटाथेरिया एवं यूथेरिया—में विभाजित किया गया। यूथेरिया को कई आर्डरों में बाँटा गया जिनमें प्राइमेट महत्वपूर्ण है क्योंकि इस आर्डर के अन्तर्गत आने वाले सभी प्राणि बहुत चतुर, फुर्तीले, जिज्ञासु तथा समूहों मे रहना पसन्द करते हैं। इसके सदस्य विभिन्न काल में भिन्न-भिन्न वातावरणों में रहते हुए समस्त पृथ्वी पर फैल गये। प्राइमेट को पुनः उपआर्डर-प्रोसिमी (पुरानी रूपी) एवं एन्थ्रोप्वायडिया (मानवारूपी) में विभक्त किया जाता है। एन्थ्रोप्वायडिया के अन्तर्गत

मर्कट, कपि तथा मानव समूह आते हैं। इन प्राणियों में पाये जाने वाले लक्षण विशेष के आधार पर इन्हें उच्च-वंशों तथा वंशों में विभक्त किया गया है जिसका अन्तिम वंश हुमिनीडी (मानव वंश) है।

हुमिनीडी (मानव वंश)

मानव पृथ्वी के सभी भागों में पाया जाता है। इसके लिए जलवायु, भू-भाग तथा अन्य प्राकृतिक अड़चनें नगण्य हैं। इन्होंने तीक्ष्ण बुद्धि के कारण प्रकृति की प्रतिकूल परिस्थिति को भी सुलझा लिया है। इस वंश के अन्तर्गत केवल तीन जीनस रामापिथेकस, आस्ट्रेलोपिथेकस एवं होमो आते हैं। पृथ्वी पर फैले हुए वर्तमान मानव समूह एक ही जीनस होमो तथा एक ही स्पीशीज सेपियेन्स के अन्तर्गत आते हैं। जीवाश्मो के आधार पर यह पता चलता है कि यह वंश कम से कम एक करोड़ चालीस लाख वर्ष पुराना है।

**मानव की शारीरिक विशेषताएँ**

मानव की शारीरिक विशेषताओं से सम्बन्धित विषय पर शुल्ज[3,4,5] ने काफी प्रकाश डाला है। इन्हीं विशेषताओं के आधार पर मानव की उत्पत्ति एवं विकास को समझने में अधिक सहायता मिलती है।

(i) मानव का पैर हाथ से अधिक लम्बा होता है।

(ii) मानव की कलाई में हड्डियाँ होती हैं।

(iii) मानव के पैर का अँगूठा सीधा, मोटा तथा सबसे लम्बा होता है और अन्य उँगलियों के समानान्तर रहता है। इसका नाखून ऊपर की ओर सीधा रहता है। दो पैरों पर चलने कारण पैर के भीतरी ओर एक चाप बन जाता है जिसके कारण उसे चलने तथा भागने-दौड़ने में सहायता मिलती है।

(iv) मानव में लिंगास्थि नहीं होती है।

(v) रीढ़ की हड्डी में ग्रीवा तथा कटिचाप का विकास उस समय होता है जब शिशु प्रथम बार अपनी गर्दन उठाने, करवट बदलने, उठकर बैठने तथा खड़े होने का प्रयास करने लगता है।

(vi) इलियक अस्थि अधिक चौड़ी तथा इसका अग्रपश्च व्यास अधिक लम्बा हो गया है।

(vii) मेडिबुल में ढुड्ढी पूर्ण विकसित होती है।

(viii) जबड़ा आगे की ओर चौड़ाई में छोटा होता है। रदनक दाँत छोटे, अन्य दाँतों के बराबर तथा प्रिमोलर मोलर जैसा ही होता है।

(ix) कपाल के बीचोबीच महाछिद्र पाया जाता है। कपाल की अस्थियों में ललाटास्थि गोल नेत्र गुहा के ऊपर सीधी हो जाती है।

मानव की ये विशेषताएँ काल, वातावरण तथा उनके साथ अनुकूलन की देन हैं जो विभिन्न परिस्थितियों में धीरे-धीरे उत्पन्न हुई है ।

**विकास के विभिन्न काल**

सबसे प्राचीन युग में कोई जीवं नहीं था इसलिए इसे अजीव युग (पीजोइक पीरियड) कहते हैं । इसके बाद जीव युग (जोइक पीरियड) आया जिसे निम्न कालों में बाँटा गया है :

(i) अति सुपुरा जीव युग (आरकियोजोइक पीरियड)—इस युग में एककोशीय जीव उत्पन्न हुए जो आज से लगभग 1 अरब 50 करोड़ वर्ष पूर्व शुरू हुआ ।

(ii) सुपुरा जीव युग (प्रोटेरोजोइक पीरियड)—इस युग में बहुकोशीय जीव उत्पन्न हुए जिनमें रीढ़ की हड्डी नहीं विकसित थी । यह युग आज से 92 करोड़ 50 लाख वर्ष पूर्व शुरू हुआ ।

(iii) पुराजीव युग (पैलेजोइक पीरियड)—इस युग में रीढ़ की हड्डी वाला जीव पैदा हुआ । मछलियाँ तथा रेंगकर चलने वाले जीव इसी काल में उत्पन्न हुए । यह समय आज से 55 करोड़ वर्ष पहले शुरू हुआ ।

(iv) मध्य जीव युग (मेसोजोइक पीरियड)—इस युग में सरीसृप तो हुए ही साथ ही उड़ने वाले पक्षी भी उत्पन्न हुए । इसके अतिरिक्त छोटे दर्जे के स्तनधारी जानवर भी इसी काल में पैदा हुए । इस युग का आरम्भ आज से 19 करोड़ वर्ष पूर्व शुरू हुआ ।

**मानव उत्पत्ति काल**

(v) नव जीव युग (कैनोजोइक या सिनोजोइक पीरियड)—मनुष्य का प्रादुर्भाव इसी युग में हुआ । इस युग को निम्नलिखित भाग मे बाँटा गया है—

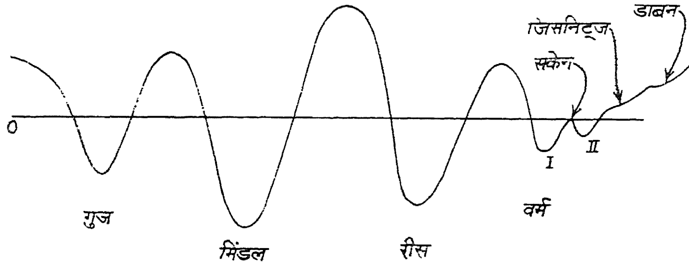
(अ) प्रादि नूतन युग (इयोसिन पीरियड)—इसमें प्लासेन्टल स्तनधारी जीव उत्पन्न हुए तथा यह युग 4 करोड़ 50 लाख वर्ष पहले शुरू हुआ ।

(ब) आदि-नूतन युग (ओलिगोसिन पीरियड)—इसमें मनुष्य से मिलते-जुलते शक्ल के छोटे-छोटे बन्दर उत्पन्न हुए । यह युग 3 करोड़ वर्ष पूर्व शुरू हुआ ।

(स) मध्य नूतन युग (मायोसिन पीरियड)—इसमें वर्तमान वन्दरों के पूर्वज तथा मनुष्य की शक्ल से मिलते-जुलते जानवर पैदा हुए । यह युग 1 करोड़ 90 लाख वर्ष पूर्व शुरू हुआ ।

(द) अतिनूतन युग (प्लियोसिन पीरियड)—इस युग में सीधा खड़ा होकर चल सकने वाला जीव पैदा हुआ । जैसे—पिथेकेन्थ्रोपस इरेक्टस । यह युग आज से 70 लाख वर्ष पूर्व शुरू हुआ ।

(य) प्राति नूतन युग या हिम-युग या हिमपात काल (प्लिस्टोसिन पीरियड या ग्लैसियल पीरियड)—इस युग में मनुष्य का अविर्भाव हुआ। इस युग में भूमि के उत्तरी गोलार्द्ध में कम से कम चार बार हिम का महापात हुआ जिसे क्रमशः गुंज, मिडल, रीस तथा उर्म I एवं II कहते हैं तथा अन्तर ग्लैसियल को गुंज-मिडल (अन्तर-ग्लैसिय I), मिडल-रीस (अन्तर-ग्लैसियल II) तथा रीस-उर्म (अन्तर ग्लेसियल III) कहते हैं। इस युग में मनुष्य के जो भी अवशेष मिले हैं उनसे प्रतीत होता है कि मनुष्य विकास की तीन प्रक्रियाओं में से गुजरा है जो निम्नवत् है—




चित्र 2. पेंकियन स्कीम ऑफ ग्लेसियेशन

### 1. भूमिवासी वानर मानव

इस युग में पाये जाने वाले जीव पेड़ों से उतरकर भूमि में रहने लगे। मानव वैज्ञानिकों के अनुसार इस प्रकार के मनुष्य अफ्रीका में निवास करते थे जिन्हें आस्ट्रेलोपिथेकस, प्लेसीएन्थ्रोपस तथा पैरेन्थ्रोपस कहते हैं। इनके मस्तिष्क मनुष्य से बहुत छोटे थे।

### 2. प्राचीन मानव

इस युग में मनुष्य से अधिक मिलते-जुलते प्राणि उत्पन्न हुए। ऐसे मनुष्यों में जावा के पिथेकेन्थ्रोपस, पेकिंग के सिनेन्थ्रोपस, इंग्लैण्ड के इयोन्थ्रोपस आदि मुख्य हैं। नियेनडरथल मानव इसी युग में आये जो वर्तमान मानव के अधिक निकट हैं।

### 3. वर्तमान मानव

आज की वर्तमान मानव का अविर्भाव आज से लगभग 20 से 25 हजार वर्ष पूर्व पश्चिमी यूरोप तथा भूमध्य सागरीय प्रदेश में हुआ। पुरातन शास्त्रियों तथा भूगर्भ शास्त्रियों ने इसे क्रोमैगनोन कहा क्योंकि सर्वप्रथम उसके अवशेष क्रो-मैगनोन प्रदेश में ही पाये गये। क्रो-मैगनोन को ही 'होमो सेपियेन्स' कहते हैं। हिन्दी के लेखकों ने इसे 'मेधावी मानव' का नाम दिया।

(र) सर्व नूतन युग (होलोसिन या रिसेन्ट पीरियड)—आज से 10 हजार वर्ष पूर्व मानव घुमन्तू जीवन छोड़कर पशुपालन और कृषि करना प्रारम्भ किया और पूर्व पाषाण काल से मध्य पाषाण काल होते हुए नव पाषाण काल में प्रवेश किया। इस युग में उपकरणों को चिकना करना और रँगना प्रारम्भ हुआ। इसके बाद मानव कांस्य युग, लौह युग, कोयला युग से अणु युग में प्रवेश किया।

**किस एन्थ्रोप्वायड एप से मानव का विकास हुआ ?**

एन्थ्रोप्वायड एप (ape) के अन्तर्गत ओरांग उटान, चिम्पैंजी एवं गोरिला आते हैं। ये तीनों बन्दर से कम तथा मनुष्य से अधिक मिलते-जुलते प्राणि हैं। इसलिए विकासवादी मनुष्य का विकास बन्दर से नहीं बल्कि एन्थ्रोप्वायड एप से मानते हैं। परन्तु विचार करने पर पाया जाता है कि ये चौपाया होते हैं, भाषा का प्रयोग नहीं करते हैं तथा इनके मस्तिष्क की खोपड़ी मनुष्य से बहुत छोटी होती है। अतः इनमें ऐसा कोई लक्षण नहीं पाया जाता है जिससे कहा जा सके कि अमुक प्राणि से विकसित होकर मनुष्य बना। प्राप्त किये गये प्रस्तरित अस्थि-पंजरों के अध्ययन से भी यह स्पष्ट नहीं हो पाता है कि मानव का विकास किस अस्थि-पंजर से हुआ है। इसलिए विकासवादियों ने इसे 'लुप्त कड़ी' का नाम दिया है।

लुप्त कड़ी को ढूंढने के क्रम में पुरातन मानव के अनेक प्रस्तरित अवशेष अफ्रीका, एशिया तथा यूरोप में मिले हैं—

**अफ्रीका में मिले प्रस्तरित अवशेष**

1. आस्ट्रेलोपिथिकस-अफ्रीकेनस या अफ्रीकन मानव वानर या टांग्स एप
2. टेलेन्थ्रोपस केपेनसिस
3. रोडेशियन मानव
4. बोस्कीय मानव

**एशिया में मिले प्रस्तरित अवशेष**

5. पिथेकैन्थ्रोपस इरेक्टस या जावा मानव
6. मोडजोकरटेनेनसिस या पिथेकैन्थ्रोपस द्वितीय
7. सिनेन्थ्रोपस या चीनी मानव या पेकिंग-मानव
8. बादजक मानव
9. सोलो मानव

(र) सर्व नूतन युग (होलोसिन या रिसेन्ट पीरियड)—आज से 10 हजार वर्ष पूर्व मानव घुमन्तू जीवन छोड़कर पशुपालन और कृषि करना प्रारम्भ किया और पूर्व पाषाण काल से मध्य पाषाण काल होते हुए नव पाषाण काल में प्रवेश किया। इस युग में उपकरणों को चिकना करना और रँगना प्रारम्भ हुआ। इसके बाद मानव कांस्य युग, लौह युग, कोयला युग से अणु युग में प्रवेश किया।

**किस एन्थ्रोप्वायड एप से मानव का विकास हुआ ?**

एन्थ्रोप्वायड एप (ape) के अन्तर्गत ओरांग उटान, चिम्पैंजी एवं गोरिला आते हैं। ये तीनों बन्दर से कम तथा मनुष्य से अधिक मिलते-जुलते प्राणि हैं। इसलिए विकासवादी मनुष्य का विकास बन्दर से नहीं बल्कि एन्थ्रोप्वायड एप से मानते हैं। परन्तु विचार करने पर पाया जाता है कि ये चौपाया होते हैं, भाषा का प्रयोग नहीं करते हैं तथा इनके मस्तिष्क की खोपड़ी मनुष्य से बहुत छोटी होती है। अतः इनमें ऐसा कोई लक्षण नहीं पाया जाता है जिससे कहा जा सके कि अमुक प्राणि से विकसित होकर मनुष्य बना। प्राप्त किये गये प्रस्तरित अस्थि-पंजरों के अध्ययन से भी यह स्पष्ट नहीं हो पाता है कि मानव का विकास किस अस्थि-पंजर से हुआ है। इसलिए विकासवादियों ने इसे 'लुप्त कड़ी' का नाम दिया है।

लुप्त कड़ी को ढूंढने के क्रम में पुरातन मानव के अनेक प्रस्तरित अवशेष अफ्रीका, एशिया तथा यूरोप में मिले हैं—

**अफ्रीका में मिले प्रस्तरित अवशेष**

1. आस्ट्रेलोपिथिकस-अफ्रीकेनस या अफ्रीकन मानव वानर या टांग्स एप
2. टेलेन्थ्रोपस केपेनसिस
3. रोडेशियन मानव
4. बोस्कीय मानव

**एशिया में मिले प्रस्तरित अवशेष**

5. पिथेकैन्थ्रोपस इरेक्टस या जावा मानव
6. मोडजोकरटेनेनसिस या पिथेकैन्थ्रोपस द्वितीय
7. सिनेन्थ्रोपस या चीनी मानव या पेकिंग-मानव
8. बादजक मानव
9. सोलो मानव

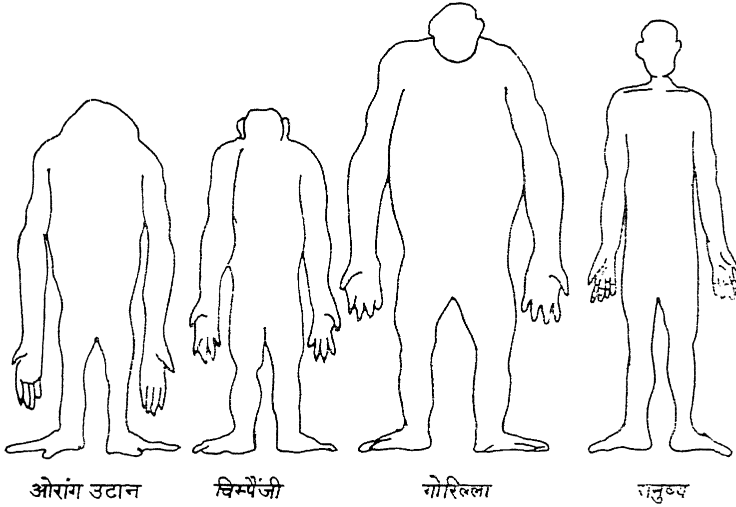
**यूरोप में मिले प्रस्तरित अवशेष**

10. इयोन्थ्रोपस या डाउसन मानव या उषः मानव
11. स्वैनकोम्बे-मानव
12. हाइडेलबर्ग मानव या पेलियो-एन्थ्रोपस
13. नियेनडरथल मानव
14. होमो सेपियन्स या मेधावी मानव
15. ग्रिमाल्डी मानव
16. क्रो-मैंगनोन मानव
17. चान्सलेड मानव

ये सभी प्रस्तरित मानव वर्तमान मानव के पूर्वज होने का दावा करते हैं लेकिन 'लुप्त-कड़ी' की समस्या हल नहीं हो पा रही है।

**जिनस रामापिथिकस**

इस जिनस पर कार्य करने के लिए लुइस ने 1934 से ही अपना ध्यान केन्द्रित किया और 1937 में पी-एच० डी० की उपाधि हेतु शोध प्रबन्ध लिखा। उसके अनुसार रामापिथिकस मानव शाखा के ही




चित्र 3 : इन चारों के अंगों का तुलनात्मक चित्र शुल्ट्ज[8] के अनुसार

सदस्य तथा आस्ट्रेलोपिकस के पूर्वज स्वरूप था। साइमन्स[6] ने लुइस के मत को सिद्ध करने का प्रयास किया। फिल्वीम[7] ने भी इसे स्वीकारा। इनके अध्ययनों से यह जीनस रामापिथिकस पंजाबिकस के नाम से जाना जाने लगा। इस जीनस से सम्बन्धित कार्य करने वालो में एल० एस० बी० लीकी, जे० एफ० इवॅनडेन, जी० एच० कर्टिस, डब्ल्यू० विशप, के० प्रसाद, एम० एच० वॉलपॉफ, ई० एल० सायमन्स, आई० टेटरसाल आदि मुख्य हैं।

इस जीनस के अवशेष प्रारम्भिक प्लियोसिन से लेकर मायोसिन युग के अन्तिम चरणों तक पाये गये हैं। इस युग में मानव ने दो पैर पर चलना प्रारम्भ कर दिया था। इसके बाद आस्ट्रेलोपिथिकस जीनस का स्थान है जो दो पैरों पर आसानी से चल सकता था। यदि रामापिथिकस इसके पूर्वज थे तो अधिक सम्भव है कि इनमें द्विपादिया की शुरुवात हुई होगी।

**जीनस आस्ट्रेलोपिथिकस**

1924 में प्रो० रेमण्ड डार्ट को दक्षिण अफ्रीका में बेचुआना लैण्ड के टांग्स नामक स्थान के एक गुफा में इसका अवशेष मिला ओर 1925 में इस पर पहली रिपोर्ट प्रकाशित हुई। प्रो० डार्ट ने इसका नाम **आस्ट्रेलोपिथिकस अफ्रीकैनस** रखा। इनकी रिपोर्ट से सारे वैज्ञानिक आश्चर्यचकित हो उठे। डार्ट ने खोपड़ी की विशेषताओं के आधार पर यह सुझाव दिया कि अब तक की पायी गयी सभी खोपड़ियों की अपेक्षा यह मनुष्य से अधिक मेल खाती है। लेकिन लुग्रो क्लार्क[9], कीथ[10] तथा अन्य विद्वानों ने इसे नहीं स्वीकारा। फिल्वीम[11] ने लिखा है कि डार्ट ने अन्य विद्वानों से सलाह नहीं ली थी इसलिए वे अप्रसन्न थे। डॉ० रॉबर्ट ब्रूम डार्ट के प्रति आकर्षित हुए और 1935 से 1950 तक इन्हीं खोजों में लगे रहे। 1938 में उन्होंने कुछ ऐसी ही अस्थियाँ प्राप्त की जिसकी विस्तृत रिपोर्ट 1946 में प्रकाशित हुई। इससे सम्बन्धित वाद-विवाद 1950-53 तक चलते रहे लेकिन अन्त में डार्ट द्वारा दी गई धारणाओं की ही पुष्टि हुई।

आट्रेलोपिथिकस का प्रादुर्भाव प्राति-नूतन युग (प्लिस्टोसिन) या प्लियोसिन युग के अन्तिम चरण में हुआ और यह भी अनुमान लगाया गया कि इस युग के समाप्त होने से पहले ही यह प्राणि पृथ्वी से लुप्त हो गया होगा।

टोवायस[12] ने इसकी क्रेनियल धारिता (capacity) 450 से लेकर 600 घन सेन्टीमी (c. c.) बतायी है। मानव में यह +1000 से लेकर 1900 c.c. है (वाइडेनराइख[13])। वैल्वाय[14] ने चिम्पैंजियों के आधार पर उनकी औसत धारिता 493·8 c.c. निकाली है। अत: इससे पता चलता है कि यह प्राणि कपि से विकसित था। आस्ट्रेलोपिथिकस पर कार्य करने वाले अन्य विद्वान हैं—जी० एच० आर० वॉन कोनिग्सवाल्ड, पी० रोबिन्स, डब्ल्यू० एल० स्टाउस, पी० बी० टोयाबस, सी० ब्रायन, आर० ब्रूम, के० पुत्जर, आर० ईवर, के० पी० ओकली, सी० जे० आरमबूर्ग, सी० एस० कून, एम० एच० डे, आई० डिबोर, एफ० सी० हावेल, जी० आइजक, जे गुडाल, डब्ल्यू० ई० ली ग्रॉस क्लार्क, एस० जुकर मैन, ए० एच० शुल्ज, जे० आर० नेपिये, सी० ओ० लवज्वाय, के० जी० हिप्ली, एफ० ई० पोरिये, जे० बर्डसेल, जी० शैलर, जी० मिथेल, एच० कुम्मेर, वाई० सुगियामा आदि।

### जीनस होमो

इस जीनस के सभी अवशेष प्लिस्टोसिन युग से प्राप्त हुए हैं। इस युग में जीनस होमो के अन्तर्गत आने वाला सबसे पहला जीव **इरेक्टस** (द्विपद) था अर्थात् वैसा जीव जिसने दो पैरों पर सीधा खड़े होकर चलना प्रारम्भ किया। यह प्राणि मध्य प्लिस्टोसिन युग में आया। इसका सर्वप्रथम अवशेष जावा में सोलो नदी के किनारे ट्रिनिल नाम स्थान से सन् 1889 में हालैंड के डॉ० यूजीन डुबोय को प्राप्त हुआ था। डॉ० डुबोय ने इसका नाम **पिथेकेन्थ्रोपस इरेक्टस** रखा। इन्हें **जावा मानव** भी कहते हैं। इन्होंने 1894 में यह भी घोषणा कर दी कि उसे मनुष्य के विकास की 'लुप्त कड़ी' मिल गई है। जावा में ही अन्य स्थानों से इसी युग के प्राणियों के अवशेष प्राप्त करने वालों में से वान कोनिग्सवाल्ड[15], मार्क्स[16], सारतोनो[17] मुरादी[18], जैकब[19] आदि मुख्य हैं।

इस युग के प्राणि चीन से भी प्राप्त किये गये हैं। प्रो० डेविडसन ब्लैक ने 1926-27 में पेकिंग के दक्षिण-पश्चिमी प्रदेश में वहाँ से लगभग 50 कि० मी० दूर चाउकउटीन गुफाओं से मानव की प्रस्तरित हड्डी प्राप्त की। इन्होंने 1929 से 1937 तक लगभग 40 अस्थिपंजर प्राप्त किये और इनका नाम **सिनेन्थ्रोपस पेकिनेन्सिस** रखा। इसे चीनी मानव या पेकिंग मानव भी कहते हैं। आकृति में यह जावा मानव से ज्यादा विकसित था। जावा मानव की क्रेनियल धारिता 960 c.c. तथा चीनी मानव की यह धारिता 1000 c. c. से 1200 c. c. तक पायी गयी। इसी युग के अन्य मानवों में कपाल धारिता 1200 c. c. से 1400 c. c. हो गई।

द्वितीय अन्तर हिमयुगीन मानवों में **स्वान्सकॉम्ब** मानव तथा **स्टाइन हाइम** मानव तथा तृतीय अन्तर हिमयुगीन मानवों में **फॉन्तेवाद मानव**, **एहरिंग्सडॉर्फ मानव**, **क्रैपीना मानव**, **सैकोपैस्टोर** तथा **क्वीन्जानो मानव** आदि मुख्य हैं जिनमें क्रेनियल धारिता 14)0 c. c. तक पायी गयी है।

### उत्तर प्लिस्टोसिन युगीन मानव : नियेनडरथल

हिग्स[20] तथा सोलंकी[21] के अनुसार इस मानव का काल तृतीय अन्तर हिमयुग के अन्तिम चरणों से लेकर मध्य बुर्म हिमयुग तक पाया जाता है। इस प्रकार आज से लगभग 75 हजार वर्ष पहले प्रारम्भ होकर 40 हजार वर्ष तक आता है।

इस मानव के अवशेष सर्वप्रथम 1856 ई० में जर्मनी के डुसेलडोर्फ प्रदेश के नियेनडरथल स्थान से प्राप्त हुए। इसके बाद 1866 ई० में बेल्जियम में स्पाई नामक गुफा से 2 अन्य कंकाल प्राप्त हुए। सवसले तथा रूडोल्फ बीरचो ने इन अस्थियों की परीक्षा की और उन्हें मानव के विकास में किसी महत्व का नहीं ठहराया जबकि डॉ० विलियम किंग ने इस प्राणि को मानव के विकास के साथ विशेष सम्बन्ध पाया और उन्होंने 1864 ई० में इसे **नियेनडरथल मानव** नाम दिया।

नियेनडरथल मानव के अवशेष यूरोप में अनेक स्थानों पर प्राप्त हुए हैं लेकिन इनकी जनसंख्या पश्चिमी तथा मध्य एशिया, अफ्रीका, क्रीमिया, लेबनान, पैलेस्टाइन, ईरान तथा ईराक में भी थी।

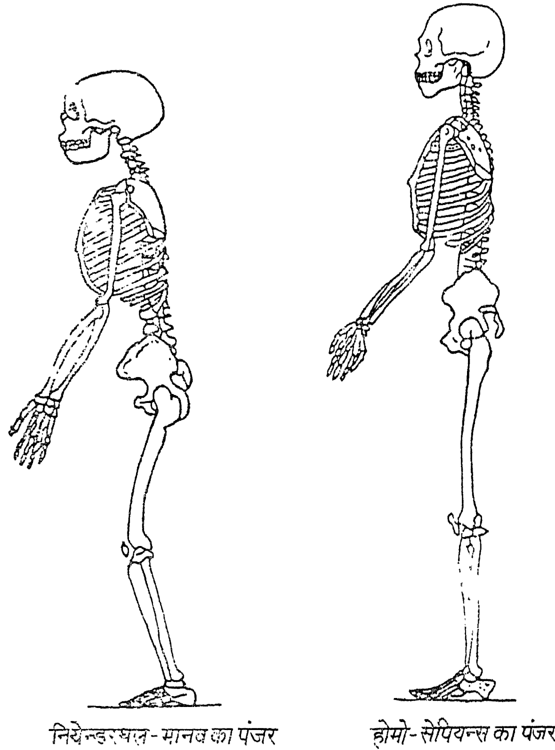
कून[22] के अनुसार इनके अधिकांश अवशेष गुफाओं से प्राप्त हुए हैं। इप तमाम जगहों पर पाये गये अवशेषों के शारीरिक लक्षणों के आधार पर इन्हें दो वर्गों में विभक्त किया गया है। हावेल[23] ने इन्हें कन्जरवेटिव या क्लासिक या यूरोपियन तथा प्रगतिशील या पैलेस्टाइन कहा है।

**कन्जरवेटिव** (यूरोपियन)

बनावट की दृष्टि से ये भारी भरकम हैं तथा इनका कपाल बड़ा है। इनकी क्रेनियल धारिता पुरुषों में 1525 से 1640 c. c. तक तथा स्त्रियों 1300 से 1425 c. c. तक पाई गई है। इनके जबड़ों का आकार बड़ा है तथा दांत भी साधारण आकार से बड़े हैं (ब्रोज तथा वाल्पॉफ[24] डहेल वर्ग[25]।

**प्रगतिशील** (पैलेस्टाइन)

इसके अन्तर्गत आने वाले नियेनडरथल हल्के शरीर व आकृति वाले होते हैं। ब्रोज तथा बाल्पॉफ[26] ने अध्ययन के क्रम में यह अनुभव किया कि यही मानव कालान्तर में धीरे-धीरे वर्तमान मेधावी मानव जाति में परिवर्तित हुआ।




चित्र 4 : मानव की उत्पत्ति तथा विकास में प्रस्तरित-मानव

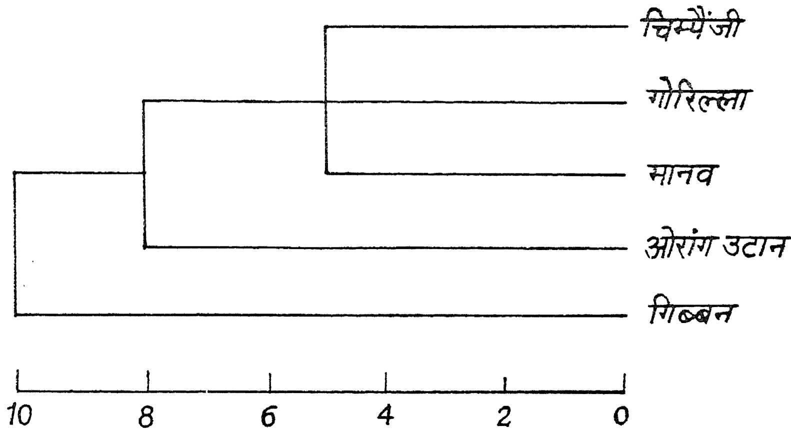
नियेनडरथल मानव में शोध कार्य करने वाले हैं—के० पी० ओक्ली, ए० कीथ, सी० जे० आरमबूर्ग, पी० बी० टोयावस, सी० एल० ब्रेस, ई० पाते, डब्ल्यू० एल० स्ट्राउस, ए० केव, डब्ल्यू० ई० लीग्रॉस क्लार्क, टी० जव्जहैन्स्की, एम० एफ० ऐश्लेमौन्टेगू, एल० एस० बी० लीकी, डब्ल्यू० ओपेनूर्थ, जी० मोरेन्ट, आर० सिंगर आदि।

## उत्तर प्लिस्टोसिन युगीन मानव-होमो सेपियन्स (मेधावी मानव)

नियेनडरथल मानव पृथ्वी पर 50 हजार वर्ष तक रहा लेकिन प्लिस्टोसिन युग के अन्तिम हिमपात के बाद इसके अवशेष नहीं मिलते हैं। अब से 25-30 हजार वर्ष पूर्व इस मानव का अन्त हो गया और एक नवीन मानव होमोसेपियन्स का अविर्भाव हुआ।

आज अधिकांश विद्वान इस मत से सहमत है कि मानव का सम्बन्ध क्रमशः चिम्पैंजी, गोरिला और ओरांगउटान से है (सिम्पसन[26])। इस मत की पुष्टि क्रोमोजोमी सादृश्य (क्लिजर एवं अन्य[27], जीव रासायनिक सादृश्य (व्युत्नर यानुस[28]), सीरोलोजिकल तथा परजीवी वैज्ञानिक परीक्षणों द्वारा हो जाता है।

इम्युनोलोजिकल परीक्षणों के आधार पर सारिच[28,29,30] तथा सारिच एवं विल्सन[31] का मत है कि मानव पूर्वज आज से लगभग 40 या 50 हजार वर्ष पूर्व मूल स्रोत से अलग हुए।




चित्र 5 : mt DNA के आधार पर होमिन्वायड प्राइमेट्स का विकासवादी वृक्ष। एक डायवरजेन्स यूनिट 1 से 1.5 मिलियन वर्ष के बराबर है। (mt= माइटोकोन्ड्रियल)

हाल ही में ए० सी० वीलसन (कैलीफोर्नियाँ विश्वविद्यालय) अपने साथियों के साथ 5 विभिन्न भौगोलिक क्षेत्रों के 147 मानवों में mt DNA का रेस्ट्रिक्सन इन्डोन्युक्लिज विश्लेषण किया और उनके

जेनेटिक डायवरजेन्स की सहायता से विकासवादी वृक्ष बनाया। मानव mt DNA वृक्ष से दो मुख्य शाखाएँ निकलीं। पहली शाखा सिर्फ अफ्रीकन के लिए तथा दूसरी शाखा के अन्तर्गत सभी पाँचों प्रजातीय समूह आते हैं। अतः यह पता चलता है कि आधुनिक अफ्रीकन mt DNA वंशज से आधुनिक कॉकेसियन की तुलना में अधिक निकट हैं (प्रकाश[32])।

मेधावी मानव की उत्पत्ति एवं विकास से सम्बन्धित अनेक वैज्ञानिकों ने इसे अपने-अपने ढग से समझाने का प्रयत्न किया और अनेक वंश वृक्ष दिखलाये हैं। इन वंशवृक्षों से पता चलता है कि एक समूह ने नियेनडरथल और मेधावी मानव की शाखाओं को प्लिस्टोसिन युग के प्रारम्भिक काल में तथा दूसरे समूह ने प्लिस्टोसिन युग के मध्य या उत्तर काल में एक दूसरे से अलग होते दिखाया है। पहले समूह में जी० ई० पिल्ग्रिम, ए० कीथ, एच० एफ० आगवर्न, बी० स्कर्ल इत्यादि मुख्य हैं। दूसरे समूह में इलिएट स्मीथ, टी० मॉनिसन तथा जे० एच० हुटन मुख्य हैं।

इन मतों के उपरान्त भी नियेनडरथल का स्थान कुछ संदिग्ध ही रह जाता है।

**शारीरिक मानवविज्ञान की उपयोगिता**

शारीरिक मानवविज्ञान मानवशास्त्र की एक महत्वपूर्ण शाखा है। इसकी उपयोगिता द्वितीय विश्व युद्ध के बाद और भी बढ़ गयी है क्योंकि आज का शारीरिक मानव विज्ञान मानन की उत्पत्ति एवं विकास, शारीरिक अंग-उपांगों में परिवर्धन और परिष्कार, मानव के पूर्वज, वर्तमान मानव प्रजाति की स्वास्थ्य समस्यायें, प्रजातीय भेद तथा उनके आधार, मानवीय वंशागति, उसके नियम, वातावरण का प्रभाव, हानिकारक गुणों का भावी सन्तानों पर प्रभाव, गुणों का प्रजनन तथा उपयोगिता, उपेक्षित गुणों से बचने के उपाय इत्यादि का अध्ययन करता है। इसका उपयोग आदि मानव की खोज, उसके समूहों की पहचान, वायुयानों, अन्तरिक्षयानों, समुद्रीयानों, रेलगाड़ियों, कार, बस इत्यादि में समुचित सीट-व्यवस्था, सिले-सिलाये वस्त्रों, सांस्कृतिक पृष्ठभूमि में पीढ़ी-दर-पीढ़ी चले आने वाले रोगों की छानबीन, उनसे बचने के उपाय, विशेष भौगोलिक परिस्थितियों का शरीर पर प्रभाव, इत्यादि जानने में हो रहा है (सिंह[33])। वर्तमान मानव समूहों के शारीरिक विभेद केवल एक, दो या तीन पीढ़ियों की ही देन नहीं है बल्कि इनके पीछे अनगिनत पीढ़ियों, आवास-प्रवास तथा वंशागति का इतिहास भी छिपा हुआ है। इस पृष्ठभूमि में मानव समूहों का अध्ययन शारीरिक मानव विज्ञान की अपनी विशेषता है तथा इसका क्षेत्र व उपयोगिता बहुत ही व्यापक है।

शारीरिक मानव बिज्ञान का इतिहास मानव के उद्विकास तथा उसके विभिन्नीकरण के ज्ञान की जिज्ञासा का इतिहास है। इसका विकास 19वीं शताब्दी से पाया जाता है। इस शताब्दी में शारीरिक मानव वैज्ञानिक तथा अन्य शोधकर्त्ताओं ने पैलियोएनाटोमी एवं पैलियोपैथोलॉजी के क्षेत्र में विशेष ध्यान दिया। नियेनडरथल मानव (1856) एवं पिथेकेन्थ्रोपस इरेक्टस (1891) की खोजों ने शारीरिक मानव वैज्ञानिकों का ध्यान आकर्षित किया। नियेनडरथल मानव में में हिल्ड फ्रेक्चर तथा जावा मानव में एक्सोसटोसिस ऑफ अनडाउटेडली पैथोलोजिकल नेचर आदि गुणों ने वैज्ञानिकों को चकित कर दिया (केस्टिग्लीयोनी[34])।

इस अवधि में पाल ब्रोका विको, चार्ल्स डारविन, हक्सले, लायल, स्पेन्सर एवं जे० एल० क्यू० व्रू इत्यादि की अध्ययनों ने मानव विज्ञान को विकसित किया। यूरोप, अफ्रीका एवं एशिया के विभिन्न हिस्सों से आदकालिन हड्डियाँ प्राप्त की गयीं और मानव विज्ञान से सम्बन्धित कई समस्याओं का सुझाव दिया गया। पैलियोपैथोलॉजी के दृष्टिकोण से एम० ए० रफर (1859-1917), राय, एल० मुदी (1880-1934), जी० इलियोट स्मीथ (1871-1937), एफ० वुड जॉन्स (1879-1954) के अध्ययन अति महत्वपूर्ण हैं। उसके बाद कंकाल, मम्मी के द्वारा रोगों से सम्बन्धित कई अध्ययन हुए जिनमें बौने की पहचान, जन्मजात क्लब फुट, हाइड्रोसिफेलस, सिफिलिस, क्षय रोग, ऑस्टेटिस, अरथ्राइटिस, बोन ट्युमर आदि मुख्य हैं (एकर्क[35])।

शारीरिक मानव विज्ञान ने प्रजाति वर्गीकरण के लिये बहुत ही महत्वपूर्ण विधियाँ प्रदान की हैं। एन्थ्रोपोलॉजिकल एवं पैलियोन्टोलोजिकल वस्तुओं को जाँचने के लिये जब रेडियोलॉजी का व्यवहार प्रारम्भ हुआ तब उच्च तकनीक विधि का प्रयोग होना शुरू हुआ। सर्वप्रथम 1925 में शिकागो के 'फील्ड म्युजियम ऑफ नेचुरल हिस्ट्री' में रोएन्टनोलॉजी विभाग की स्थापना हुई। 1931 में मुडी ने एन्थ्रोपोलॉजी मेम्बायर में बहुत ही सुन्दर एक्सरे फोटोग्राफ बनाया। सुन्दर एक्सरे फोटोग्राफ बनने से हड्डियों को बिना नष्ट किये ही जाँचा जाने लगा तथा मम्मी को बिना उद्घाटित किये ही अध्ययन किया जाने लगा।

प्राचीन समय में प्रयोग की गई पैथोलोजिकल प्रक्रिया को अध्ययन करने के लिये मानव वैज्ञानिकों ने मम्मी को अपना विषय चुना। इलियोट स्मीथ एवं एफ० वुड जॉन्स नुबिया में पाये गये हजारों कंकालों का अध्ययन किया। 1904 में प्रसिद्ध शारीरिक मानवशास्त्री एच०एच० वील्डर ने मम्मी जाँचने की विधि का वर्णन किया। उन्होंने ऊतक को 1-3% पोटेशियम हाइड्रॉक्साइड के घोल में 12 से 48 घण्टे तक रखा ताकि ऊतक पुन: अपने मूल आयतन में आ जाये। उसके बाद इन्हें 3% फार्मेल्डिहाइड के घोल में रखा और इसे स्थायी रूप से रख दिया।

मम्मी एवं हड्डियों को जाँचने की महत्वपूर्ण विधि रक्त-समूह हैं। इस सन्दर्भ में व्याड[36,37], वीमेन्स एवं व्याड[38] तथा केन्डेला[39,40,41,42] के कार्य बहुत ही महत्वपूर्ण हैं। मम्मी का रक्त समूह निर्धारित करने की विधि इस तथ्य पर निर्भर करती है कि एग्लूटिनोजिन्स A और B सिर्फ रक्त में ही नहीं पाये जाते हैं बल्कि वे ऊनक में भी पाये जाते हैं जो बहुत ही स्थायी रासायनिक तत्व है। इन्हें सीधे एग्लूटिनेसन के द्वारा नहीं दिखाया जा सकता है बल्कि इन्हें देखने के लिये इन्हें विशेष रूप से मिलाया जाता है और अन्त में एग्लूटिनिन्स एन्टी-A और ऐन्टी B से मिलाया जाता। अन्त में ऊतक A और B लाल कोशिका से मिल जाते हैं तथा देखा जाता है कि अब तक दोनों एग्लूटिनिन्स है या नहीं। यदि A कोशिका अब तक घोल के द्वारा एग्लूटिनेटिन नहीं हुई है तो इसका अर्थ है कि ऐन्टी-A एग्लूटिनिन समीकृत ऊतक के द्वारा ग्रहण कर लिया गया है और इससे पता चलता है कि ऊतक में अवश्य ही A उपस्थित है। वीमन और व्याइड[43] ने इस क्रिया को अधिक मात्रा में और कन्ट्रोल के साथ करने की सलाह दी और इसे जाँचने को भी अनुशंसा की। मम्मी में रक्त-समूह निर्धारण करने की यह बहुत ही उपयुक्त विधि है।

डॉ० मजूमदार ने भारत के रूपकुण्ड में पाये गये अस्थि, मज्जा (मैरो) एवं मांस से रक्त-समूह का निर्धारण किया। क्रेनियोमेट्रिक, आस्ट्रीयोमेट्रिक एवं एन्थ्रोमेट्रिक मापों के आधार पर यह निष्कर्ष निकाला गया कि रूपकुण्ड के लोग इथनिकली होमोजिनस थे। रेडियोकार्बन जाँच से पता चला कि प्राप्त अवशेष 600 वर्ष पुराने हैं।

शारीरिक मानव विज्ञान हड्डियों (प्रस्तरित तथा अप्रस्तरित) का विज्ञान तो है ही, यह ह्यूमेन बायोलॉजी के विभिन्न अवस्थाओं से मुख्य रूप से सम्बन्धित है। यह विज्ञान अब रिओरिमेंटेसन के नये मार्ग से गुजर रहा है। उस पर भी ह्यूमेन बायोलॉजी एवं ह्यूमेन स्पीसीज की क्रमिक उत्पत्ति से सम्बन्धित जटिल समस्याओं को समझने के लिये अत्यन्त वैज्ञानिक खोजों पर विशेष बल दिया जा रहा है।

**एन्थ्रोपोमेट्री : मानव शरीर मापने का विज्ञान (मानवमिति)**

मानवमिति साधारणतः मानव विकास के अध्ययन से सम्बन्धित है तथा मानव प्रजातियों को निर्धारित करने और उन्हें विभिन्न वर्गों में अलग करने के लिये प्रयोग में लायी जाती है। व्यावहारिक मानवमिति में यद्यपि पुरानी विधियों का ही प्रयोग होता है फिर भी यह मानव शरीर की चौड़ाई, मोटाई, आकार एवं अनुपात आदि के अध्ययन में प्रयुक्त होता है। मानव किसी भी वातावरण में अपने आप को जीवित रखता है क्योंकि वह उस वातावरण के अनुकूल पोशाक या उपकरण बना लेता है। इसलिये व्यावहारिक मानवमिति के अन्तर्गत कपड़ा, सीट, टेबुल, टूल, बेंच आदि चीजों पर विशेष ध्यान दिया जाता है। इन चीजों का वास्तविक आकार उनके व्यवहारकर्त्ता की कद, मोटाई आदि पर निर्भर करता है। यदि बेंच या टूल की ऊँचाई व्यवहारकर्त्ता के अनुपात में बहुत छोटी हो तो व्यवहारकर्त्ता के लिये बैक स्ट्रेन की समस्या होगी और यदि सामग्री अधिक लम्बी होगी तो व्यवहारकर्त्ता कोई काम ही नहीं कर सकेगा। इसलिये इस सभी त्रुटियों को दूर करने के लिये व्यावहारिक मानवमिति की उपयोगिता बढ़ती जा रही है। उचित एवं उपयोगी उपकरण पाकर कार्यकर्त्ता भी उत्साह एवं लगन से काम करता है और हितकारी एवं प्रभावशाली विचार भी प्रकट करता है। मानवमिति ने ही कार्यालय, स्कूल, प्रयोगशाला एवं घरों को विभिन्न प्रकार के फर्नीचरों से सुसज्जित किया है। इन भवनों में उपलब्ध जगहों के अनुसार ही फर्नीचर एवं उपकरणों को सजाने में मानवमितीय पद्धति के ही अनुसार उन्हें आकार एवं बनावट दी जाती है। मानवमिति ने ही कुर्सी की आकृति एवं बैठने की ऊँचाई, फर्नीचर एवं अन्य उपयोगी वस्तुओं की ऊँचाई, कार्य करने की सतहों की ऊँचाई तथा बिजली की स्विच की ऊँचाई इत्यादि को मानव के कद के अनुसार ही बनाया है।

मानवमिति का उपयोग प्रारम्भ से ही मानव की वृद्धि एवं विकास तथा प्रजातीय वर्गीकरण के अध्ययन के लिये किया जाता रहा है क्योंकि यह शारीरिक मानव विज्ञान की मुख्य प्रविधियों में से एक है। इसकी उपयोगिता केवल मानव विभेदों के अध्ययन के लिये ही नहीं, वरन् अनेक व्यावसायिक क्षेत्रों में भी की जाती है। प्राइमेटों के तुलनात्मक अध्ययन तथा उद्‌विकास सम्बन्धी अध्ययनों के लिये यह एक अमूल्य साधन है। मानवमिति की कई देशनायें तो व्यक्ति की शारीरिक वृद्धि, शारीरिक गठन इत्यादि

को दर्शाने की उत्तम सूचक हैं। आजकल व्यावहारिक मानवमिति का उपयोग विभिन्न क्षेत्रों में किया जाता है जैसे—सेना के चयन में, औद्योगिक कार्य में (न्युमेन[44]), अपराधी एवं अन्य खोजों में, जीवन बीमा में, मानव शरीर एवं उनके सम्बन्धों के बीच कमी को जानने में (साहु[45,46]), सिलाई के लिये, मशीन चालकों के उपयुक्त स्थान-निर्धारण के लिये (मुरले[47], घर, अस्पताल, विद्यालय, कार्यालय आदि के निर्माण में, खेल-कूद में, विकलांगों के लिये उपयुक्त उपकरण बनाने में वर्मा[48,49], डेम्सटर[50] मेफरवेन्ड एवं अन्य[51]। यदि इन वस्तुओं को उचित माप के आधार पर न बनाया जाय तो वे व्यर्थं होंगी।

वर्मा[52] ने मानव वैज्ञानिक कनसलटेन्ट की आवश्यकता पर बहुत ही बल दिया है क्योंकि इनके द्वारा वैसा ही उपकरण एवं कार्य की वस्तु प्रदान की जाती है जो ग्राहक की शारीरिक बनावट के अनुरूप हो। ग्राहक को सामान खरीदने में सावधानी न बरतने से उन्हें आर्थिक क्षति तो होती ही है, साथ ही साथ वे मानसिक रूप से भी प्रभावित हो जाते हैं। ऐसा पाया गया है कि अच्छी किस्म की लकड़ी होने के बावजूद उचित माप से न बने होने के कारण वह घर की शोभा भी नहीं बढ़ाता है और न घर के लोगों के लिये आरामदायक ही होता है। जब व्यक्ति आराम का अनुभव नहीं करता है तो वह नई खोज के बारे में सोच भी नहीं सकता है। अतः वर्मा के दिये गये सुझाव को स्वीकारना चाहिये और मानवमितिज्ञ की राय के अनुरूप ही कार्य करना चाहिये।

आजकल अमेरिका एवं अन्य विकसित देशों में देखा जा रहा है कि औरतें अपनी घरों को सजाने में अहम भूमिका निभा रही हैं। वे रसोई घर की सामग्रियों में विशेष दिलचस्पी लेती हैं। भारत जैसे देश में भी मानवमितिज्ञों की भूमिका बढ़ी है और लोग इनके सहयोग से अपनी आवश्यकता के अनुरूप ही अपने-अपने घरों के लिये उपयोगी वस्तुयें खरीद रहे हैं।

मानवमितिज्ञों ने ही विभिन्न घरों के लिये हैंगर लटकने की जगह निश्चित की है ताकि व्यक्ति अपने कोट या अन्य कपड़े आसानी से टाँग सकें।

द्वितीय विश्व युद्ध के दौरान शारीरिक मानव विज्ञान को विशेष रूप से स्वीकार किया गया और सेना एवं औद्योगिक समस्याओं से सम्बन्धित अध्ययनों जैसे—मानव का शारीरिक आकार, सेफेलोफेसियल विभिन्नता आदि पर विशेष महत्व दिया जाने लगा। उसके बाद इसकी उपयोगिता पोशाक बनाने में, व्यक्तियों के नियोजन में, वाहन में निश्चित सीट देने में, फर्निचर बनाने आदि-आदि में विशेष रूप से होने लगी लगी। यूरोपीय और अमेरिकी विश्वविद्यालयों में इनसे सम्बन्धित शोधकार्य होने लगे। परन्तु तुलनात्मक रूप से भारत में बहुत ही कम शोधकार्य हुए हैं। अभी भारत के 30 विश्वविद्यालयों में मानव विज्ञान की पढ़ाई स्नातकोत्तर स्तर पर हो रही है लेकिन हम लोगों को इस विषय में गंभीरता से सोचने का अवसर ही नहीं मिला है और न तो सरकार तथा अन्य स्रोतों की ओर से किसी भी प्रकार का आर्थिक अनुदान ही मिला है। कुछ शारीरिक मानवशास्त्री इस विषय की उपयोगिता को विकसित करने की दिशा में प्रयत्नशील हैं परन्तु आर्थिक स्थिति के कारण विवश हो जाते हैं।

जनसंख्या की दृष्टि से भारत का स्थान दूसरा है। इतनी बड़ी आबादी वाले देश में यह निश्चित है कि लोगों को तरह-तरह की समस्याओं का सामना करना पड़ता है जिनमें फर्नीचर डिजायनिंग, स्कूलों, कालेजों, विश्वविद्यालयों, कार्यालयों, वाहनों, रेल, ट्राम आदि में सीटों को सजाना आदि भी महत्वपूर्ण है। इन समस्याओं को मानवमितिज्ञ बहुत ही कुशलता से हल करते हैं क्योंकि उन्हें मानवमितीय मापों के आधार पर उपलब्ध जगह पर किस प्रकार का फर्नीचर चाहिये और उन्हें कितनी जगह में स्थापित करना चाहिये आदि का पूरा-पूरा ज्ञान रहता है। यदि उन्हें अवसर दिया जाय तो वे अपनी कुशलता का प्रदर्शन कर सकते हैं।

बने-बनाये वस्त्र-निर्माण में, जूते बनाने के कारखाना में तथा चश्मे के फ्रेम आदि की कम्पनियों में शारीरिक मानवशास्त्रियों की आवश्यकता होती है क्योंकि इन कम्पनियों में उपर्युक्त वस्तुएँ ठीक आकार में बनाने में कठिनाई होती है। भारत में बाटा, फ्लेक्स, वी० एस० सी० एक्शन, लखानी आदि कई ख्यातिप्राप्त शू फैक्ट्रियाँ हैं परन्तु दुःख की बात है कि इन कारखानों में एक भी शारीरिक मानवशास्त्री को नियुक्त नहीं किया गया है। भारत सरकार शारीरिक मानवशास्त्रियों की सेवा सुरक्षा विभाग में बहुत ही अच्छी तरह से ले सकती है और इनकी कार्यक्षमता को पोशाक, शू, टेन्ट, फर्नीचर बनाने तथा वाहनों में सीटिंग व्यवस्था आदि के क्षेत्र में परख सकती है। शारीरिक मानव विज्ञान के प्रति उदासीनता को देखते हुए ऐसा प्रतीत होता है कि इस विज्ञान की वास्तविक भूमिका से न तो भारत सरकार ही पूर्ण रूप से परिचित है और न अन्य प्राइवेट कम्पनियाँ ही।

ली ग्रास क्लार्क[53] ने बताया कि ऑक्सफोर्ड के शारीरिक मानव विज्ञान विभाग में एक नया विभाग 'इरगोनोमिक्स' खोला गया। इरगोनोमिक्स वह विज्ञान है जिसमें मानव का अध्ययन उसके कार्य करने की परिस्थिति के सन्दर्भ में किया जाता है। विभिन्न जलवायु वाले प्रदेशों में निवास करने वाले मानव तथा उन परिस्थितियों में कार्य करने की शर्तों में सामंजस्य लाने के लिये आवश्यक चीजों से सम्बन्धित समस्या को हल करना ही इस विज्ञान का मुख्य उद्देश्य है। इस सन्दर्भ में ऑक्सफोर्ड के शारीरिक मानव विज्ञान विभाग और ब्रिटिश आयरन और स्टील रिसर्च एशोसियेशन तथा नेशनल कोल बोर्ड के बीच सीधा सम्पर्क है जिससे फाउन्ड्री एवं खान में कार्य करने वाले लोगों की सहनशीलता का अध्ययन किया जा सके।

भारत एक विशाल देश है। यहाँ विभिन्न प्रकार की जलवायु वाले प्रदेश हैं। विभिन्न जलवायु के प्रदेशों में कई औद्योगिक इकाइयाँ तथा खानें हैं जहाँ मनुष्य काम करते हैं। अतः भारत शारीरिक मानव वैज्ञानिकों के लिये इरगोनोमिक्स जैसे विज्ञान को विकसित करने के लिये बहुत ही उपयुक्त अवसर प्रदान करता है। भारत की विभिन्न इकाइयों, फैक्ट्रियों, खानों, आयरन एवं स्टील प्लान्टों आदि में कार्यरत लाखों लोगों की कार्य-क्षमता के स्तर को निर्धारित करने के लिये सर्वेक्षण करने की आवश्यकता है। यह भी जानने की आवश्यकता है कि शारीरिक कार्य क्षमता जन्मजात प्रजातीय विभिन्नताओं से या विभिन्न जलवायु परिस्थितिकीय कारकों से कितनी मिलती है। इससे यह पता चल सकता है कि पोषक तत्व तथा स्वस्थ्य वातावरण को विकसित करने से शारीरिक कार्य-क्षमता में वृद्धि हो सकती है

या नहीं तथा विभिन्न जलवायवीय प्रदेशों में मानव प्रजाति में कैसे परिवर्तन होता है। भारत विभिन्न प्रजातीय समूहों का एक क्षेत्र है जिनकी अपनी सांस्कृतिक पहचान है। इसलिये भारतीय औद्योगिक संस्थाओं में इस प्रकार का शोधकार्य करने से वह सिर्फ देश के लिये ही महत्वपूर्ण नहीं होगा बल्कि प्राइवेट एजेन्सियों के लिये भी हितकर होगा जो हजारों कुशल और अकुशल कर्मचारियों को नियुक्त करती हैं। चूँकि ये कर्मचारी विभिन्न जलवायु वाले प्रदेशों के वासी होते हैं इसलिए इनमें विभिन्न प्रकार की कार्य-क्षमता होगी तथा विभिन्न प्रजातीय तत्वों का परिस्थिति से विभिन्न प्रकार का तारतम्य रहा होगा।

शारीरिक मानव विज्ञान की देन सोसल मेडिसिन एवं ह्यूमेन इकोलॉजी के क्षेत्र में भी सराहनीय रही है। रोग की उत्पत्ति उसी समय से हुई है जिस समय से प्राणि इस पृथ्वी पर आया। मनुष्य चूँकि अपनी संस्कृति के कारण अन्य सभी प्राणियों से श्रेष्ठ है इसलिये प्रत्येक मानव समाज में रोगों को दूर करने के लिये **फारमाकोपिया** तथा **थीरेपी** आदि जैसी पद्धति सदा से विद्यमान रही हैं चाहे वह जादू, धर्म या विज्ञान से सम्बन्धित हो। एकरकेच[54] ने कहा है कि किसी विशेष अवधि की सम्पूर्ण संस्कृति को समझने के लिये यह आवश्य है कि उस अवधि की चिकित्सा-पद्धति को भी गहराई से समझा जाय। इनके कार्य से प्रभावित होकर कई शारीरिक मानव वैज्ञानिकों ने इस दिशा में कार्य किया है जिनमें ई० हुटन, एच० वेलब्राइज, जे० एल० एंगल, एडोल्फ शुल्ज, ई० स्मिथ, ए० हर्डोलिका आदि के कार्य महत्वपूर्ण हैं।

मानव विज्ञान मानव का समग्र अध्ययन है इसलिये मानव वैज्ञानिकों ने चिकित्सा विज्ञान की विभिन्न शाखाओं के लिये बहुत ही महत्वपूर्ण विधियों, सिद्धान्तों एवं तथ्यों को विकसित किया है (हसन एवं प्रमाद[55,56])। इस क्षेत्र में शारीरिक मानवशास्त्रीय देन को फिनोटिपीक तथा जिनोटपीक के सन्दर्भ में अध्ययन करना चाहिये (वीनर[57])। पारिस्थितिकी एवं भोजन सिर्फ मानव की वृद्धि को ही प्रभावित नहीं करते हैं बल्कि इनका प्रभाव रोगों से भी सम्बन्धित है। इसलिये सभी स्वास्थ्य केन्द्रों के लिये शारीरिक मापों का अध्ययन आवश्यक होना चाहिये।

भारत में लाखों लोग गरीबी-रेखा से नीचे जीवन व्यतीत करते हैं इसलिये यह स्वाभाविक है कि वे विभिन्न प्रकार के रोगों से ग्रसित होंगे और उनमें मृत्यु-दर भी अधिक होगी। इसलिये इस क्षेत्र में भी शारीरिक मानवशास्त्रियों की आवश्यकता है तथा उनके कार्य क्षेत्र की भी अधिक सीमा है। अतः शारीरिक मानवशास्त्री एवं चिकित्साशास्त्री के बीच उत्तम ताल-मेल होना चाहिये जिससे दोनों एक दूसरे से लाभान्वित हो सकें।

हाल ही में "सिविल एरोमेडिकल रिसर्च इंस्टीट्यूट इन यू० एस० ए०" के सर्वाइवल रिसर्च विभाग में शारीरिक मानव विज्ञान विभाग की स्थापना की गई है। आधुनिक प्रयोगात्मक विधि जैसे—अल्ट्रासोनिक डिटरमिनेसन ऑफ बाडी कम्पोजिसन, इमप्लान्टेड गामा आइसोटोप्स फार बोन मानिटरिंग आदि के व्यवहार का अध्ययन शारीरिक मानव विज्ञान के अन्तर्गत किया जाता है। इसके अलावा इस विभाग में हड्डियों की स्थैतिक एवं गत्यात्मक जाँच की जा रही है और विभिन्न प्रकार के

मानवमितीय माप एवं विभिन्न वातावरण में मानव की विकास आदि पर विशेष बल दिया जा रहा है।

सिन्डर[58] ने शारीरिक मानव वैज्ञानिकों की भूमिका का वर्णन करते हुए बताया है कि अन्तरिक्ष उडान वायुयानों में इनकी सेवा अनिवार्य होनी चाहिये। एरोस्पेस मानव वैज्ञानिक सिर्फ उड़ान भरने वाले पोशाक तथा उपकरण को बनाने में ही सहायता नहीं करेंगे बल्कि इस परिस्थिति से सम्बन्धित मानव की जटिल से जटिल समस्याओं को भी दूर करने में सहायक होंगे।

यह सत्य है कि अब तक हम लोग इन विशेष तथ्यों पर शोधकार्य नहीं कर सके हैं परन्तु आशा है कि निकट भविष्य में शारीरिक मानवशास्त्रियों से इन विषयों पर भी विशेष शोधकार्य होंगे।

**वर्णान्धता**

शारीरिक मानव वैज्ञानिकों ने अपना कार्य क्षेत्र वर्णान्धता को भी बनाया है। इन्होंने बताया कि वाहन चालकों को लाल रोशनी और हरी रोशनी को अच्छी तरह से पहचानने की शक्ति होनी चाहिये, कपड़ा मील में निरीक्षक को कपड़े के रंग को पहचानना चाहिये तथा महिलाओं को घर सुसज्जित करने के लिये विभिन्न रंगों के भेद को पहचानना चाहिये। इन मामलों में यदि रंगों को पहचानने में त्रुटि हो तो उचित न्याय नहीं हो सकता है तथा वाहनचालक के द्वारा दुर्घटना हो सकती है। इतना ही नहीं, वर्णान्ध व्यक्ति पेन्टर, टेक्सटाइल डिजाइनर, डेकोरेटर इत्यादि नहीं बन सकता है और न तो वह कोई ऐसा काम कर सकता है जिसमें रंगों को पहचानना जरूरी हो।

सर्वप्रथम जॉन डाल्टन ने वर्णान्धता का वैज्ञानिक पद्धति द्वारा अध्ययन किया। लेकिन इनके कार्य को बहुत बाद में स्वीकारा गया और कई देशों—ब्रिटेन, जर्मनी, यू० एस० ए० इत्यादि में इससे सम्बन्धित कार्य किये गये। इन कार्यों से यह निष्कर्ष निकाला गया कि बन्दर और वनमानुष को को छोड़कर अन्य सभी स्तनधारी प्राणि रंग को नहीं पहचान सकते हैं। कुत्ता, बिल्ली, घोड़ा, हाथी, शेर विभिन्न प्रकार के रंगों को नहीं पहचान सकते हैं। वे सिर्फ काला, सफेद एवं भूरी छाया को अलग कर सकते हैं।

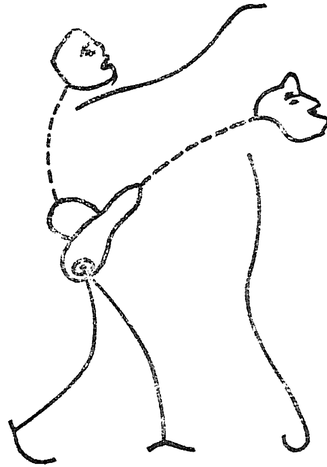
शारीरिक मानव वैज्ञानिक आनुवंशिकी के अध्ययन में बहुत ही अधिक बल देते रहे हैं और आनुवंशिकी दृष्टिकोण से शारीरिक लक्षणों का अध्ययन किया है लेकिन वर्णान्धता की वंशागति पर बहुत हो कम कार्य हुए हैं। विभिन्न प्रजातीय समूह में इस पर जो भी कार्य हुआ हैं उससे कोई महत्वपूर्ण निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता है। 20वीं शताब्दी के प्रारम्भ में पुरुषों में दोष पूर्ण रंग-दृष्टि की गणना की गई जिससे 3 से 4 प्रतिशत लोग ही दोषपूर्ण दृष्टि वाले पाये गये। पारसन्स[59] ने 1924 में सर्वेक्षण के दौरान पुरुषों में 4% तथा महिलाओं में 0.4% त्रुटि पायी। माइल्स एवं क्रेन[60] ने अमेरिकन विश्वविद्यालय के विद्यार्थियों में 8.4% तथा सेल्समैनों में 7.2% त्रुटि पायी। कोलिन्स[61] ने 1937 में यह लिखा कि त्रुटि वाले व्यक्तियों की संख्या अधिक है। वर्नर एवं स्ट्रेकर[62] ने पूर्वी ब्रिटेन को तुलना में पश्चिमी बिटेन में त्रुटि वाले व्यक्तियों की संख्या अधिक पायी और सुझाव दिया कि दृष्टि दोष प्रजाति से सम्बन्धित हो सकता है।

वर्णान्धता एक लिंग-सहलग्न गुण है जिसमें मनुष्य लाल और हरे रंग में भेद नहीं कर पाता। अधिकांश लिंग सहलग्न रोगों के जीन्स केवल X-लिंग गुणसूत्र में ही स्थित होते हैं और इन रोगों को एक पीढ़ी से दूसरी पीढ़ी में पहुँचाने का काम लिंग गुणसूत्र ही करते हैं। सामान्य नरों में न तो यह रोग होता है और न ही वह अपने वंशजों को यह रोग हस्तान्तरित करता है। स्त्रियाँ यद्यपि वर्णान्ध नहीं होतीं पर उनमें वर्णान्धता के जीन मौजूद होते हैं, अर्थात् इस रोग के प्रति वे हेटेरोंजाइगोस होती हैं और वर्णान्ध सन्तानों को जन्म देती हैं।

रंगीन और रंगहीन वस्तुओं को देखना विजुवल रिसेप्टर की फिजियोलॉजी पर आधारित होता है। वर्णान्धों में लाल, पीला हरा या नीले रंग का बोध नहीं हो पाता है। उनमें सिर्फ सफेद, काला तथा भूरे रंग का ही अनुमान हो पाता है। बेजुड़[63] ने बताया कि जिन जानवरों में रॉड नहीं होता है वे सिर्फ रंगीन रंगों को ही देख सकते हैं तथा जिनमें सिर्फ रॉड होता है तथा कोन्स नहीं होते हैं वे सिर्फ रंगहीन रंगों को देख सकते हैं।

**मानव की यात्रा**

मानव स्पीशीज जैविक विकास की देन है। मानव को वर्तमान स्वरूप प्राप्त करने में काफी समय लगा है। स्वाभाविक रूप से यह प्रश्न उठता है कि क्या कोई ऐसी निश्चित विभेदीय रेखा है जहाँ से मानव के वंशज अन्य जीवों से अलग हुए, इस सम्बन्ध में जीववैज्ञानिकों और मानववैज्ञानिकों के बीच विभिन्न मत हैं। प्राणिविज्ञानियों का मत है कि मानव के वंशज 5 मिलियन वर्ष पूर्व अन्य प्राणियों से अलग हुए और उन्होंने अपनी वंश परम्परा को बढ़ाया जबकि मानववैज्ञानिक उसे 15 मिलियन वर्ष पूर्व बताते हैं।



चित्र 6· मनुष्य द्विपादिता के विकसित रूप

तिथि ी उलझन में न पड़कर विकास की सीढ़ी को देखते हैं तो स्पष्ट पता चलता है कि मानव के पूर्वज दो पैरों पर चलना प्रारम्भ किया। इस यात्रा में प्रथम पग 3.5 मिलियन वर्ष पूर्व रखा गया।

पेड़ों पर से उतरकर खुले आसमान में रहने के लिये दो पैरों पर चलना अपने आप में एक अनुकूल तकनीक है। दो पैरों पर चलने से दोनों हाथ स्वतंत्र हो गये जिनके द्वारा कुछ कार्य करने के लिये बाध्य हो गये। हाथों का स्वतंत्र होना ही संस्कृति की देन है और यहीं से सांस्कृतिक विकास भी प्रारम्भ होता है। इसी अवस्था से मानव की मस्तिष्क में सोचने समझने की प्रक्रिया में अमूल परिवर्तन होना प्रारम्भ हुआ। सूझ-बूझ एवं स्वतंत्र हाथ के मेल से पत्थर के उपकरणों को निश्चित आकार दिया जाना प्रारम्भ हुआ। निश्चित आकार का उपकरण लगभग 2.5 मिलियन वर्ष पूर्व बना और होमो-सेपियन्स का प्रादुर्भाव हुआ।

पूर्व मध्य प्लिस्टोसिन युग में ही होमो इरेक्टस का प्रादुर्भाव हुआ जो धीरे-धीरे अफ्रीका, यूरोप तथा एशिया में फैल गये। भोजन की तलाश तथा बड़े पशुओं का शिकार आदि ने उच्च टेकनोलॉजी को विकसित किया लेकिन होमो इरेक्टस की सबसे महत्वपूर्ण उपलब्धि आग का अविष्कार एवं उसका प्रयोग है। यह आज से लगभग 5 लाख वर्ष पूर्व की प्राप्ति है। आग के सम्मुख बैठकर ही उनमें स्थायी रूप से बसने की प्रवृत्ति जगी होगी तथा सामाजिक व्यवहार जागृत हुआ होगा है।

भोजन की तलाश में इधर-उधर घुमन्तू जीवन बिताने के क्रम में ही पूर्वी यूरोप में नियेनडरथल मानव प्रकट हुआ ! यह जीवन अत्यन्त ही कठिन जलवायवीय परिस्थिति में बीता। साल में लगभग चार महीना तो अत्यन्त ही शीतकालीन युग था। इस विषम परिस्थिति में भोजन प्राप्त करना भी दूभर था। अपने अस्तित्व को बचाये रखने के लिये भोजन एकत्र करके सुरक्षित रखने की पद्धति को विकसित करना जरूरी था। यही पहला मानव है जिन्होंने मृत व्यक्ति की धार्मिक मान्यताओं के साथ दफनाना प्रारम्भ किया और लाश के साथ-साथ भोजन और उपकरणों को भी रख दिया जाता था। एक उदाहरण ऐसा भी पाया गया है जिसने लाश को फूलों के बिछावन पर रखकर दफनाया गया था।

जिस प्रकार से नियेनडरथल मानव का आकस्मिक प्रादुर्भाव हुआ उसी प्रकार वह अचानक लुप्त भी गया। इसके पीछे कहानी जो भी हो वह अभी भी शोध का विषय है। इस युग में क्रो-मैगनोन मानव प्रकट हुआ। यह पूर्ण रूप से आधुनिक मानव जैसी ही शारीरिक आकृति एवं मानसिक बुद्धि वाला मानव है। यह पूर्णतः शिकारी एवं घुमन्तू जीवन व्यतीत करने वाला मानव था। उच्च पैलियोलिथिक युग में निर्मित गुफा आर्ट, पत्थरों की पेंटिंग, हड्डी तथा बारहसींगे की सींगो आदि के अध्ययनो से पता चलता है कि इस युग में मानव पूर्णतः भोजन की खोज में ही नहीं रहते थे बल्कि वे सांस्कृतिक तत्वों को भी विकसित करने में लग गये थे। 12,000 वर्ष पूर्व मानव ने खेती करनी प्रारम्भ की जिससे उसकी जीवन पद्धति बदल गई। मानव शिकारी और घुमन्तू जीवन को छोड़कर कृषक बन गया और स्थायी रूप से रहना प्रारम्भ किया। मानव जीवन की लम्बी-दुष्कर यात्रा में यह पहला अवसर आया जब उन्हें दिन भर घूमते रहने के बजाय कुछ विश्राम करने का अवसर मिला। इसी युग में मानवों ने विभिन्न प्रकार

के घरेलू तथा कृषि कार्य के लिए उपकरण बनाये। भोजन पकाने के लिये चूल्हों का निर्माण हुआ। मानव की यात्रा में चाक का अविष्कार एक नयी महत्वपूर्ण उपलब्धि है और इसी चाक से आधुनिक टेक्नोलॉजी विकसित हुई है।

स्थायी रूप से जीवन-यापन प्रारम्भ करने से मानव की आबादी बढ़ती गयी जिससे गांव बने और विश्व में कई नदी घाटी सभ्यताएँ विकसित हुई जिनमें भारत की सिन्धु घाटी सभ्यता बहुत ही महत्वपूर्ण है। पिथेकेन्थ्रोपस मानव के दो पैरो से चलना प्रारम्भ करने में मनुष्य को आज की स्थिति में ला दिया है। किसी ने सोचा भी नहीं होगा कि अनिश्चित प्रथम चरण का स्वरूप कहाँ से कहाँ तक पहुंच जायेगा। लेकिन विकास की यह प्रक्रिया यहीं पर समाप्त नहीं होती है। यह तो अविरल गति से बढ़ती जा रही है। विकासवादी तथा शारीरिक मानव शास्त्री ने भावी मानव का स्वरूप भी निर्धारित कर दिया है जिसकी खोपड़ी की धारिता 4000 cc तक होगी। वह सम्भवतः 'पोंगो' मानव के नाम से जाना जायेगा।

भारत में मानव विज्ञान का लम्बा इतिहास है। 1870 में इसे भारतीय प्राणि विज्ञान सर्वेक्षण में संलग्न किया गया था। उस समय से इसके विभिन्न क्षेत्रों में काफी कार्य हुए हैं। फिर भी इसके व्यावहारिक पक्ष पर अभी भी विशेष ध्यान देने की आवश्यकता है।

## निर्देश

1. सिद्धान्तालंकार, एस., सामा. मानव शा., 1970, III
2. रिपुदमन सिंह, शारीरिक मानव विज्ञान, 1974, 4
3. शुल्ज, ए. एच., रेभ. बायो. 1936, **11**, 259-283
4. वही, प्रोसी. अम. फिलो. सो., 1950, **94**, 428-449
5. वही, इरिस. ज. मेड. साइन्स, 1957, 341-356
6. साइमन्स, ई. एल,, जेने. एण्ड इभोलु. बायो. ऑफ द प्राइ. स., 1963, 65-129
7. पिल्बीम, डी. आर., दी एसेन्ट ऑफ मैन, 1972
8. शुल्ज, ए. एच., ह्यूमेन ग्रोथ (स.), 1960
9. लुग्रॉ क्लार्क, डब्ल्यू. ई., द फोसि. इमे. फॉर ह्यू. इमो. 1967
10. कीथ, ए., द फोसि. एन्थ्रो. एप फ्राम टांग्स, नेचर, 1925, 115-234
11. पिल्बीम, डी. आर., क्रम संख्या 7 जैसा
12. टोबायस, पी. बी., नेचर, 1963, **197**, 743
13. वाइडेन राइख, एफ., फैलेन. सिनिका, न्यू. सिरिज, 1943, **D-10**, n. 127, 1-229
14. वैल्वॉय, एच., एकेडे. डेस. साइ., 1954, **238**, 1349

15. भॉन कोनिंग्सवाल्ड, जी. एच. आर., नेचर, 1954, **173**, 795

16. मार्क्स, एम., अमे. जर. ऑफ फिजि. एन्थ्रो., 1971, **34**, 61

17. सरतानो, एस., प्रो. स्का. बी., 1968, **5**, 396-422

18. सुरादी, टी., एम. एस. जियो. सर्वे. ऑफ इन्डो. 1969

19. जैकब, पी. ए., लैन्सेट, 1959, **2**, 423

20. हिग्स, ई. एस., प्रो. प्रिहिस्ट. सोस., 1941, **27**, 144

21. सोलेकी, आर. एस., साइन्स, 1960, **139**, 179

22. कून, सी एस.,एफ्रे. ए. नो. इंक, 1962

23. हावेल, एफ. सी., रेव. बायो., 1957, **32**, 330

24. ब्रोज, डी. तथा वाल्पॉक, एम. अमे. एन्थ्रो., 1971, **73(5)**, 1156

25. इहलवर्ग, ए., ह्यूमेन बायो., 1963, **35**, 237

26. सिम्पसन, आर., साइंस, 1966, **152**, 472

27. क्लिजर, एच., ममेरटन, एच., मुटन, ई. तथा लॉग ई., इन. क्लासि. एण्ड ह्यूमे. इमो., 1963, 235

28. सारिच, वी., इन ओल्ड वल्ड मंकि., 1970, 175-226

29. वही, इन बैक. फॉर मैन, 1971, 60-81

30. वही, इन क्ला. मेन्स फेमि. ट्री., 1972, 453-460

31. सारिच, वी. तथा विल्सन, ए., प्रोसी. नेश. एके. साइंस, 1967, **58**, 142

32. प्रकाश, रवि, एवरी साइंस, 1993, **XXVIII**, 2, 48-51

33. सिंह, रिपुदमन, शारीरिक मानव विज्ञान, 1974, 7

34. केस्टिग्लीयोनी, ए., ए. हिस्ट्री ऑफ मेडि., 1947, E. C. 4

35. एककेच, ई. एच., बुले. ऑफ प्रिमि. मेडि., 1942, **XI**, 503-21

36. व्याड, डब्ल्यू. सी., प्रोसि. ऑफ द सोस. ऑफ एक्स. बायो. एण्ड मेडि., 1934, **31**, 671-72

37. वही, इम्यु., 1937, **32**, 307-319

38. वीमेन, एल. सी. तथा व्याड, डब्ल्यू. सी., अमे. एन्थ्रो., 1937, **39**. 583-92

39. केन्डेला, पी. बी., अमे. ज. फिजि. एन्थ्रो., 1936, **21**, 429-432

40. वही, 1937, **23**, 71-78

41. वही, 1940, **27**, 209-221

42. वही, ह्यूमेन बायो., 1942, **14**, 413-443

43. बीमेन, एल. सी. क्रम. संख्या 38 जैसा

44. न्युमेन, आर. डब्ल्यू., अप्ला. एन्थ्रो. इन एन. इनवे., 1953

45. साहु, चतुर्भुज, विज्ञान परि. अनु. पत्रिका, 1990, 33, 2, 129-134

46. वही, 1992, 35, 3, 195-210

47. मुरले, के. एफ. एच., डाटा ऑन हूमे. पर. ईन डिजा. 1957

48. वर्मा, वी. के., अप्ला. फिजि. एन्थ्रो. पि. हेल्थ, 1959

49. वही, इस्टर्न एन्थ्रो., 1963, **13**(4)

50. डेम्सटर, डब्ल्यू. टी., द एन्थ्रो. वाडी. एक्स., 1955a, **63**, 4

51. मेफरलेण्ड, ए., रास एच. डब्ल्यू. तथा स्टाउट, एन. आर. अप्ला. फि. एन्थ्रो., 1963, 1-10

52. वर्मा, बी. के., क्रम संख्या 48 जैसा

53. ली ग्रास क्लार्क, दि स्को. ऑफ फिजि. एन्थ्रो., 1958

54. क्रम संख्या 35 जैसा

55. हसन, के. ए. तथा प्रसाद, बी. जी., इण्डि. मेडि. एसो., 1959, **32**, 182-190

56. वही, 1960, **35**, 22-36

57. वीनर, जे. एस., द स्को. ऑफ फिजि. एन्थ्रो. एण्ड ह्यूम, बायो., 1958

58. सिन्डर, रिचर्ड जी., अमे. जर. फिजि. एन्थ्रो., 1961, **19**, 185-194

59. पारसन्स, सम. आस. ऑफ अप्ला. फिजि. एन्थ. से लिया गया

60. माइल्स तथा क्रेन वही

61. कोलिन्स वही

62. थरनर तथा स्ट्रेकर वही

63. जुड, डी. बो., साइ. एण्ड इन्ड, 1952

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 2, 1994

# विभिन्न स्तनधारियों के एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक का हिस्टोकेमिकल अध्ययन

**केशव कुमार**
एनाटमी विभाग, चिकित्सा विज्ञान संस्थान
काशी हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[ प्राप्त—जनवरी 1, 1993 ]

## सारांश

विभिन्न स्रोतों से प्रौढ़ आयु वर्ग के मनुष्य, भैंस, सुअर, बकरी, कुत्ता, खरगोश और चूहा में से प्रत्येक के 100 हृदय (कुल 700) एकत्र किये गये। एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक का ऊतक हृदय से उनके उद्गम के समीप लिया गया तथा 10 प्रतिशत फार्मलीन और बेकर्स कैल्सियम कैडमियम फार्मॉल घोल में आरक्षित किया गया। प्रासेसिंग के पश्चात् पैराफिन ब्लाक तैयार किये गये तथा रोटरी माइक्रोटोम की सहायता से 10 माइक्रान मोटाई के सेक्शन काटे गये जिन्हें इन धमनियों की दीवाल की विभिन्न पर्तों में कार्बोहाइड्रेट एवं वसा के अभिक्रिया उत्पाद के घनत्व के तुलनात्मक अध्ययन के लिए परआयोडिक एसिड शिफ्स तथा सूडान ब्लैक-बी से रंजित किया गया।

एसेंडिग एओर्टा की आन्तरिक पर्त में पल्मोनरी ट्रंक की आन्तरिक पर्त की अपेक्षा कार्बोहाइड्रेट/वसा के अभिक्रिया उत्पाद का घनत्व तीन गुना अधिक पाया गया जबकि एसिंडिग एओर्टा की मध्य तथा बाह्य पर्तों में कार्बोहाइड्रेट/वसा अभिक्रिया उत्पाद का घनत्व पल्मोनरी ट्रंक की मध्य तथा बाह्य पर्तों में कार्बोहाइड्रेट/वसा के अभिक्रिया उत्पाद के घनत्व के क्रमशः बराबर था। यह निर्धारित किया गया कि समस्त स्तनधारियों की एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक की आन्तरिक पर्त में स्थित उपापचयी संचयी उत्पाद के घनत्व में तीन और एक का अनुपात होता है जो इन धमनियों की गुहा में बहने वाले रक्त के नाड़ी-दाब के अनुपात से समानता रखता है।

## ABSTRACT

**Histochemical study of ascending aorta and pulmonary trunk in different mammals.** *By* Keshaw Kumar, Department of Anatomy, Institute of Medical Sciences, Banaras Hindu University, Varanasi.

Hearts of human, buffalo, pig, goat, dog, rabbit and rat (100 of each) were procured from various sources. These mammals were of adult age group belonging to different orders of class mammalia. Tissue of ascending aorta and pulmonary trunk was taken—immediately distal to their commencement to be preserved in 10% formalin and Baker's Calcium Cadmium Formol Solution. Paraffin blocks were prepared after processing and sections of 10 micron thickness were cut with the help of rotary microtome. Sections were stained with Periodic Acid Schiffs (PAS) and Sudan Block-B to compare the density of reaction products of carbohydrate and lipid in the layers of these arteries.

Density of reaction products of carbohydrate/lipid was observed three times more in tunica intima of ascending aorta than the tunica intima of pulmonary trunk while in tunica media and tunica adventitia of ascending aorta density of reaction products of carbohydrate/lipid was equal to density of reaction products of carbohydrate/lipid in tunica media and tunica adventitia of pulmonary trunk. It was concluded that in all the mammals a ratio of 3:1 existed between density of metabolic storage products in tunica intima of ascending aorta and pulmonary trunk resembling with the pulse-pressures of blood flowing in the lumen of these arteries.

यद्यपि अहमद तथा मोहिरद्दीन[1], ब्राउनस्टीन[2], बंटिंग तथा बंटिंग[3], बाला इत्यादि[4], बांगा तथानोवोटनी[5], डर्बे तथा कर्क[6], कर्क तथा डर्वे[7], कर्क तथा सोरेन्सेन[8], कर्क तथा हान्सेन[9], कर्क तथा लौरसेन[10], कर्क तथा प्राएटोरियस[12], लौरसेन तथा कर्क[13], सोरेन्सेन तथा कर्क ,सोमेर तथा स्वार्ट्ज, नवरत्नम तथा पाल्कामा[14] द्वारा अतीत में एसेंडिंग एओर्टा अथवा पल्मोनरी ट्रंक से सम्बन्धित विभिन्न प्रकार के हिस्टोकेमिकल अध्ययन किये जा चुके हैं, परन्तु अभी तक किसी भी लेखक द्वारा एसेंडिंग एओर्टा और पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की पर्तों में कार्बोहाइड्रेट तथा वसा का तुलनात्मक अध्ययन नहीं किया गया। अतः प्रौढ़ आयु वर्ग के विभिन्न स्तनधारियों के एसेंडिंग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक की बाह्य, मध्य तथा आन्तरिक पर्तों में उपापचयी संचयी उत्पादों (कार्बोहाइड्रेट तथा वसा) के घनत्व की तुलना करने की दृष्टि से वर्तमान अध्ययन को संचालित किया गया।

## प्रयोगात्मक

विभिन्न स्रोतों से मनुष्य, भैंस, सुअर, बकरी, कुत्ता, खरगोश तथा चूहा में से प्रत्येक के सौ-सौ (कुल 700) हृदय एकत्र किये गये। ये सभी स्तनधारी प्रौढ़ आयु वर्ग के थे तथा क्लास मैमेलिया के निम्नलिखित क्रमों (आर्डर्स) से सम्बन्धित थे—

1. रोडेन्शिया जैसे चूहा
2. लैगोमार्फा जैसे खरगोश
3. कार्नीवोरा जैसे कुत्ता
4. आर्टियोडैक्टाइला जैसे भैंस, सूअर, बकरी
5. प्राइमेट्स जैसे मनुष्य

एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक का ऊतक हृदय से इनके उदगम के समीप लिया गया तथा 10 (प्रतिशत फार्मेलीन में (कार्बोहाइड्रेट के लिए), एवं बेकर्स कैल्सियम कैडमियम फार्मोल घोल में (वसा के लिए) आरक्षित किया गया। प्रासेसिग के पश्चात् पैराफिन ब्लाक तैयार किये गये और रोटरी माइक्रोटोम की सहायता से 10 माइक्रान मोटाई के सेक्शन काट कर उन्हें परआयोडिक एसिड शिफ्स से (कार्बोहाइड्रेट के लिए) तथा सूडान ब्लैक-बी से (वसा के लिए) रंजित किया गया। सूक्ष्मदर्शी द्वारा प्रत्येक धमनी की सभी पर्त्तों में कार्बोहाइड्रेट तथा वसा के अभिक्रिया उत्पादों का निरीक्षण किया गया। धमनियों की दीवाल की आन्तरिक, मध्य तथा बाह्य पर्त्तों को कार्बोहाइड्रेट तथा वसा के अभिक्रिया उत्पादों के घनत्व के अनुसार रंजित करने के लिए +, ++, +++, ++++ श्रेणीबद्ध किया गया + सबसे हल्के रंग तथा ++++ सबसे गहरे रंग का प्रतिनिधित्व करता है। समस्त निरीक्षण एक ही निरीक्षक द्वारा दृष्टि निर्धारण विधि द्वारा किये गये।

## परिणाम तथा विवेचना

1. **कार्बोहाइड्रेट** (सारणी 1)

कार्बोहाइड्रेट के अभिक्रिया उत्पादों का घनत्व सभी स्तनधारियों के एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक की बाह्य पर्त्त में ++++ तथा मध्य पर्त्त में ++ पाया गया। आन्तरिक पर्त्त में कार्बोहाइड्रेट के अभिक्रिया उत्पादों का घनत्व सभी स्तनधारियों की एसेंडिग एओर्टा में +++ तथा पल्मोनरी ट्रंक में + था। (चित्र 5 तथा 6)

2. **वसा** (सारणी 2)

वसा के अभिक्रिया उत्पादों का घनत्व सभी स्तनधारियों के एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक की बाह्य पर्त्त में ++++ तथा मध्य पर्त्त में ++ था। आन्तरिक पर्त्त में वसा के अभिक्रिया उत्पादों का घनत्व सभी स्तनधारियों की एसेंडिग एओर्टा में +++ तथा पल्मोनरी ट्रंक में + पाया गया। (चित्र 1, 2, 3 तथा 6)

कार्बोहाइड्रेट/वसा के अभिक्रिया उत्पादों का घनत्व सभी स्तनधारियों के एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक की बाह्य पर्त्त में ++++ (चित्र 2, 4, 5-7) तथा मध्य पर्त्त में ++ (चत्र 1-7) था। आन्तरिक पर्त्त में कार्बोहाइड्रेट/वसा के अभिक्रिया उत्पादों का घनत्व एसेंडिग एओर्टा में +++ (चित्र 1, 6) तथा पल्मोनरी ट्रंक में + था (चित्र 2, 3, 5)।

सभी स्तनधारियों की एसेंडिग एओर्टा की आन्तरिक पर्त्त में कार्बोहाइड्रेट/वसा के घनत्व से तीन गुना अधिक था तथा एसेंडिग एओर्टा में रक्त का नाड़ी-दाब पल्मोनरी ट्रंक में रक्त के नाड़ी-दाब से तीन गुना अधिक होता है[7]। अतः यह निर्धारित किया गया कि एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक की आन्तरिक पर्त्त में स्थित उपापचयी अभिक्रिया उत्पादों में तीन और एक का अनुपात होता है जो इन धमनियों की गुहा में बहने वाले रक्त के नाड़ी-दाब के अनुपात से समानता रखता है।

## सारणी 1

स्तनधारियों के एसेंडिग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक में कार्बोहाइड्रेट के अभिक्रिया पदार्थ का घनत्व

| स्तनधारी | एसेंडिग एओर्टा | | | पल्मोनरी ट्रंक | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | आन्तरिक पर्त | मध्य पर्त | वाह्य पर्त | आन्तरिक पर्त | मध्य पर्त | वाह्य पर्त |
| मनुष्य | +++ | ++ | ++++ | + | ++ | ++++ |
| भैंस | +++ | ++ | ++++ | + | ++ | ++++ |
| सुअर | +++ | ++ | ++++ | + | ++ | ++++ |
| बकरी | +++ | ++ | ++++ | + | ++ | ++++ |
| कुत्ता | +++ | ++ | ++++ | + | ++ | ++++ |
| खरगोश | +++ | ++ | ++++ | + | ++ | ++++ |
| चूहा | +++ | ++ | ++++ | + | ++ | ++++ |

**सारणी 2**

स्तनधारियों के एसेंडिंग एओर्टा तथा पल्मोनरी ट्रंक में वसा के अभिक्रिया पदार्थ का घनत्व

| स्तनधारी | एसेंडिंग एओर्टा | | | पल्मोनरी ट्रंक | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | आन्तरिक पर्त | मध्य पर्त | बाह्य पर्त | आन्तरिक पर्त | मध्य पर्त | बाह्य पर्त |
| मनुष्य | +++ | ++ | ++++ | + | ++ | ++++ |
| भैंस | +++ | ++ | ++++ | + | ++ | ++++ |
| सुअर | +++ | ++ | ++++ | + | ++ | ++++ |
| बकरी | +++ | ++ | ++++ | + | ++ | ++++ |
| कुत्ता | +++ | ++ | ++++ | + | ++ | ++++ |
| खरगोश | +++ | ++ | ++++ | + | ++ | ++++ |
| चूहा | +++ | ++ | ++++ | + | ++ | ++++ |

## निर्देश

1. अहमद, एम० एम० तथा मोहिउद्दीन, ए०, मेड० जे० मलाया०, 1969, **17**, 199-208.

2. ब्राउनस्टीन, एच०, आर्च० पैथ०, 1960, **69**, 617-632.

3. बंटिंग, जी० एच० तथा बंटिंग, एच०, आर्च० पैथ०, 1953, **55**, 257-264.

4. बाला, जे०, बांगा, आई० तथा जोसेपोविट्स, जी०, इट्सच्ट्ज, विटामिन फार्स्च० वेन, 1948-49, **2**, 1.

5. बांगा, आई० तथा नोवोटनी, ए०, एक्टाफिजियोल० हुंग०, 1951, **2**, 327.

6. डर्बे, एम० तथा कर्क, जे० ई०, जे० जेरैन्टाल० 1956, **11**, 33.

7. केशव कुमार, वैज्ञानिक, 1990, **23**, 1-5.

8. कर्क, जे० ई० तथा डर्बे, एम,० जे० जेरैन्टाल० 1956, **11**, 129.

9. कर्क, जे० ई० तथा सोरेन्सेन, एल० बी०, जे० जेरैन्टाल०, 1956, **11**, 373.

10. कर्क, जे० ई० तथा हैन्सेन, पी० एफ०, जे० जेरैन्टाल०, **1953**, **8**, 150.

11. कर्क, जे० ई० तथा लौरसेन, टी० जे० एस०, जे० जेरैन्टाल० 1955, **10**, 18.

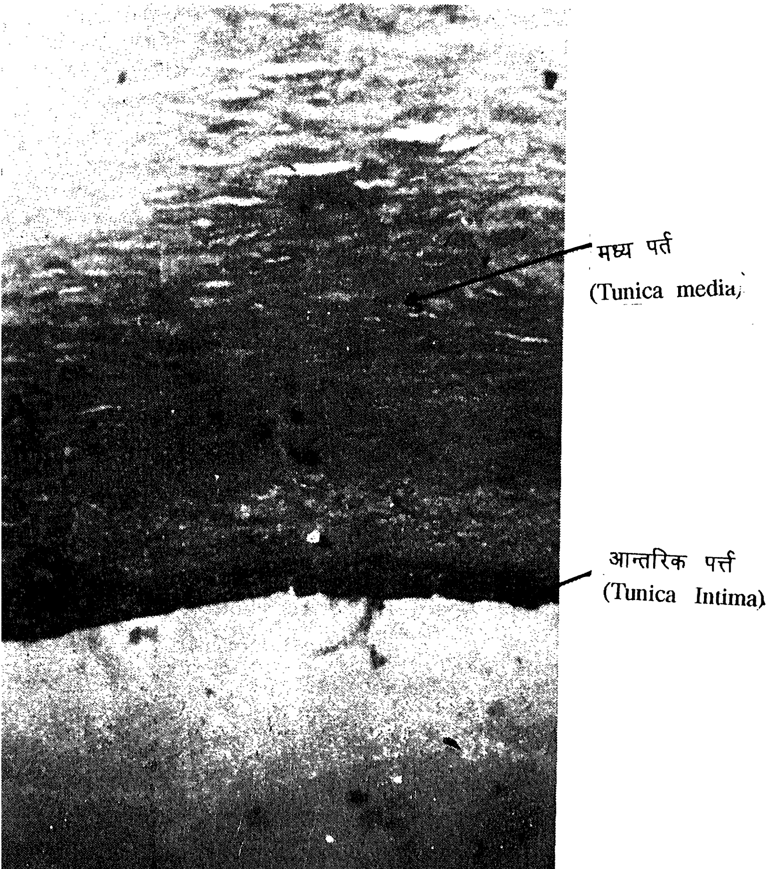
12. कर्क, जे० ई० तथा प्राएटोरियस, ई०, साइन्स, 1950, **III**, 334.

13. लौरसेन, टी० जे० एस० तथा कर्क, जे० ई०, जे० जेरैन्टाल०, 1955, **10**, 26.

14. नवरत्नम, वी० तथा पालकामा, ए०, एक्टा एनाटामिका०, 1966, **63**, 445.

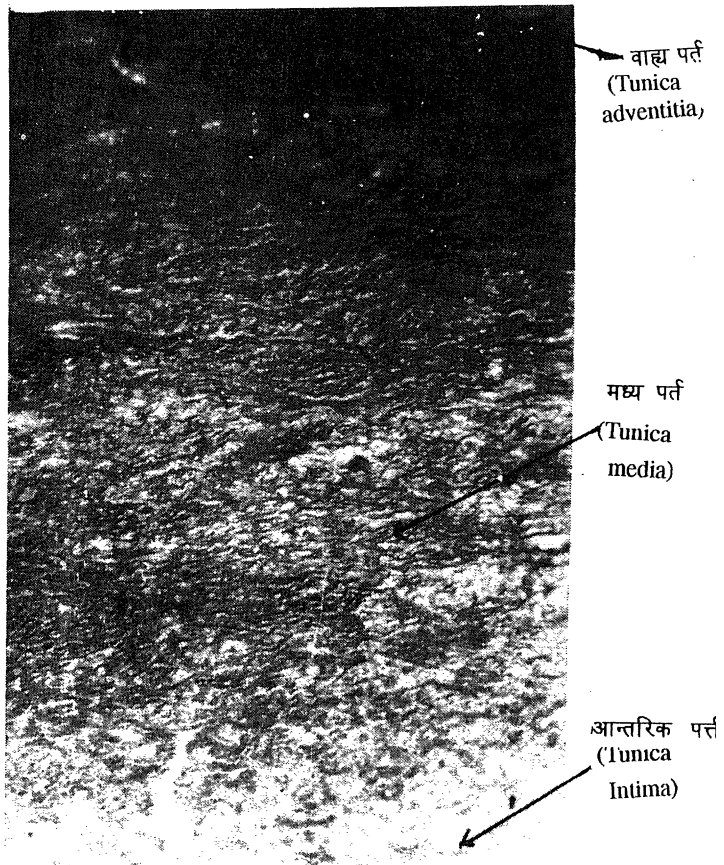
15. सोरेन्सेन, एल० बी० तथा कर्क, जे० ई०, जे० जेरैन्टाल० 1956, **11**, 28.

16. सोमर, जे० बी० तथा स्वार्ट्ज, सी० जे०, एथीरोस्क्लीरोसिस०, 1971, **13**, 293-304.



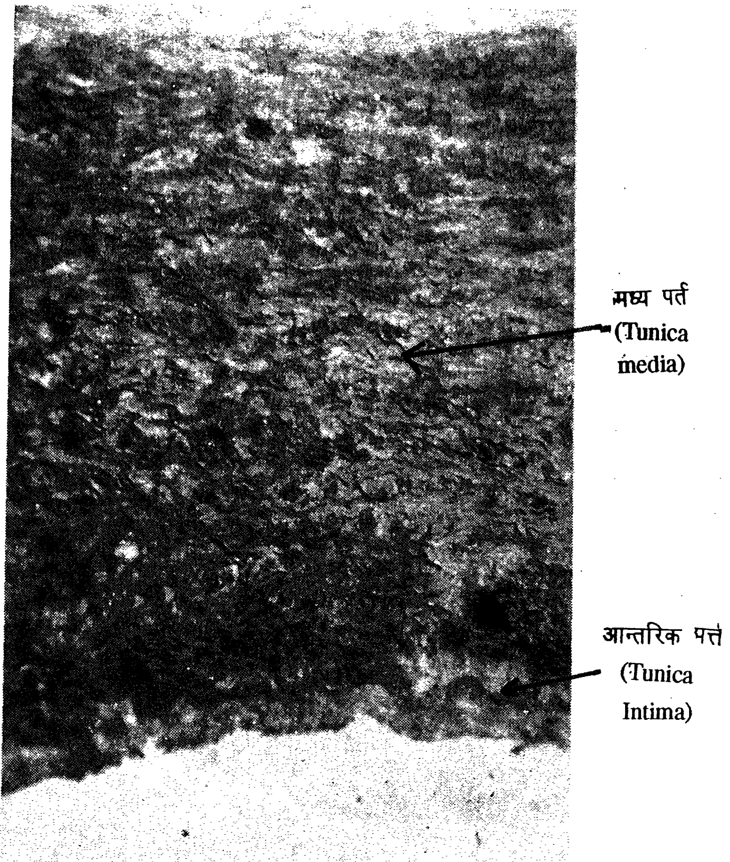

चित्र संख्या - 1

आन्तरिक पर्त्त में वसा के प्रतिक्रिया पदार्थ का + + + घनत्व दर्शाते हुए मनुष्य के एसेंडिंग एओर्टा की अनुप्रस्थ काट (सूडान ब्लैक-बी × 100)



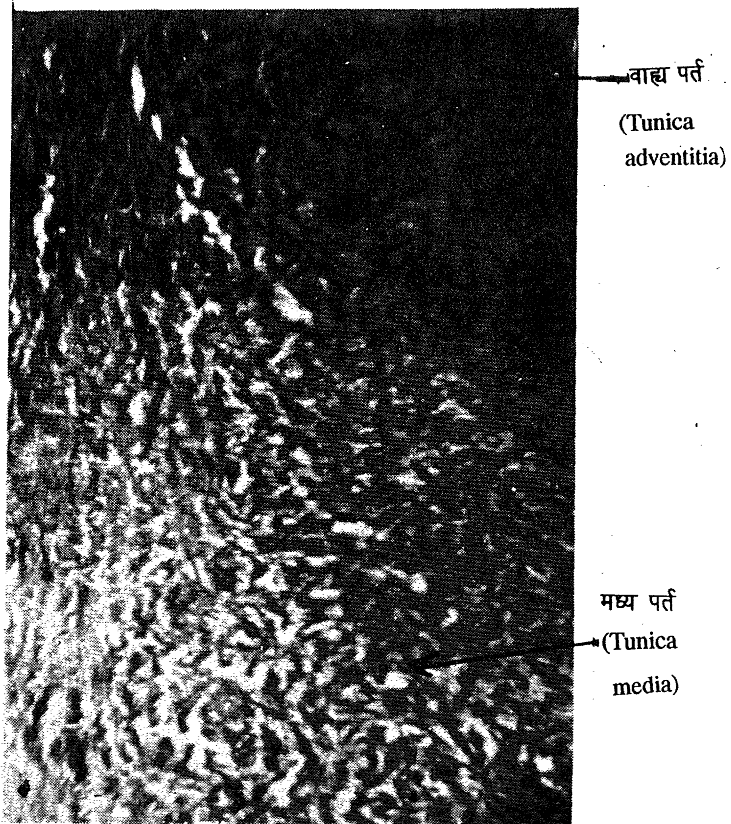

चित्र संख्या - 2

आन्तरिक पर्त्त में वसा के प्रतिक्रिया पदार्थ का + घनत्व दर्शाते हुए भैंस के पल्मोनरी ट्रंक की अनुप्रस्थ काट (सूडान ब्लैक-बी × 100)



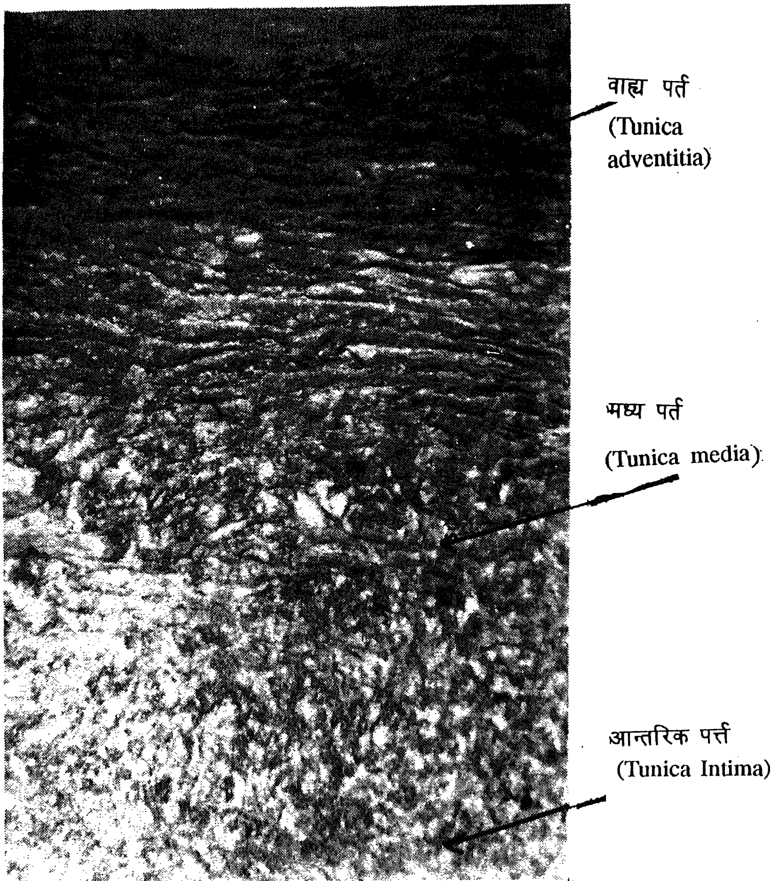

चित्र संख्या - 3

आन्तरिक पर्त्त में वसा के प्रतिक्रिया पदार्थ का + घनत्व
दर्शाते हुए मनुष्य के पल्मोनरी ट्रंक की
अनुप्रस्थ काट (**सूडान ब्लैक - बी ×  100**)



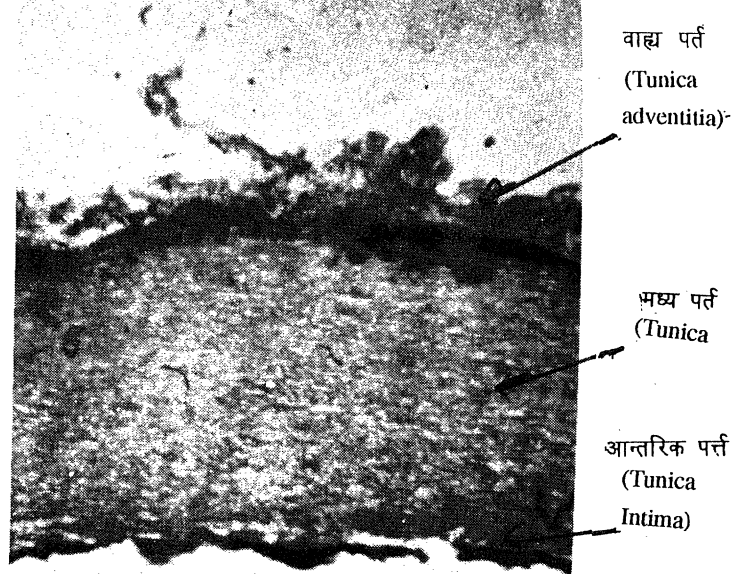

चित्र संख्या - 4

वाह्य पर्त में कार्बोहाइड्रेट के प्रतिक्रिया पदार्थ का
+ + + घनत्व दर्शाते हुए कुत्ते के एसेंडिग एओर्टा की
अनुप्रस्थ काट (पर आयोडिक एसिड शिफ्स ×  100)



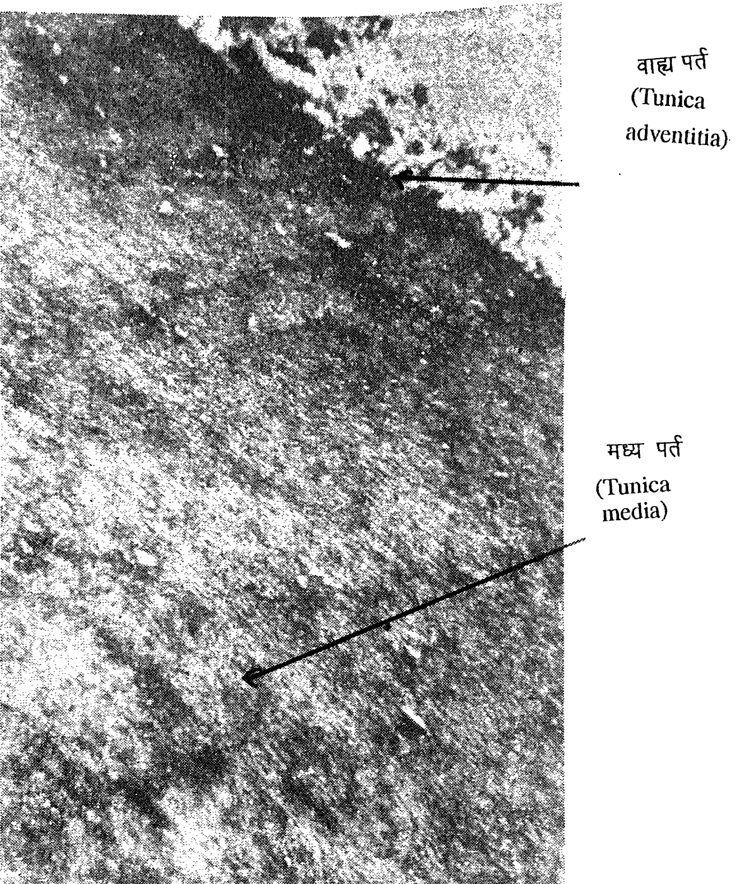

चित्र संख्या - 5

आन्तरिक पर्त्त में + मध्यपर्त में + + तथा बाह्य पर्त में + + + + कार्बोहाइड्रेट के प्रतिक्रिया पदार्थ के घनत्व को दर्शाते हुए बकरी के पल्मोनरी ट्रंक की अनुप्रस्थ काट (परआयोडिक एसिउ शिफ्स × 100)




चित्र संख्या - 6

आन्तरिक पर्त्त में + + + मध्य पर्त्त में + + तथा वाह्य पर्त्त में + + + + कार्बोहाइड्रेट के प्रतिक्रिया पदार्थ का घनत्व दर्शाते हुए खरगोश के एसेंडिंग एओर्टा की अनुप्रस्थ काट (परआयोडिक एसिड शिफ्स × 100)




चित्र संख्या - 7

मध्य पर्त में + + तथा बाह्य पर्त में + + + + वसा के प्रतिक्रिया पदार्थ का घनत्व दर्शाते हुए सुअर के एसेंडिंग एओर्टा की अनुप्रस्थ काट (सूडान ब्लैक - बी × x 100)

# लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिये।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अँग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—

फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, **जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80**

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) पचास रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

10. लेख "**सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2**" इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 60 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 15 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

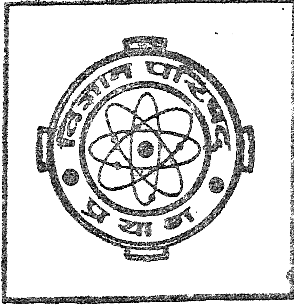
Rates
Annual Rs. 60 *or* 12 £ *or* $ 40
Per Vol. Rs. 15 *or* 3 £ *or* $ 10

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद

ISSN 0505--5806



# VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

# विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 37 July 1994 No. 3

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेक्नॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्·इलाहाबाद

## विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 3, 1994

# झाबुआ जिले के दक्षिणी भाग में भौमजल की परिस्थितियाँ

आर० डी० तापी
भू-विज्ञान विभाग, होल्कर विज्ञान महाविद्यालय, इन्दौर
तथा
एस० के० शाह
शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, झाबुआ (म० प्र०)

[ प्राप्त—अप्रैल 4, 1994 ]

## सारांश

झाबुआ के दक्षिणी भाग में किये गये अवलोकनों से ज्ञात होता है कि भौमजाल का प्रवाह मोड एवं हथनी सरिताओं की दिशा में है तथा यह प्रवाह प्रमुख रूप से शैलों के संस्तर तल, शिस्टाभता, विभंग एवं संधियों द्वारा नियन्त्रित होता है। इस क्षेत्र के भाभरा के समीपवर्ती भागों में रानापुर की तुलना में ऊँचे जलविज्ञानी प्रवण हैं। रानापुर के फायलाइट निमाड बालुकाश्म में भौमजल स्तर का उतार-चढ़ाव भाभरा की तुलना में अधिक परिसर में दृष्टिगोचर होता है। रानापुर के निम्नवर्ती भू-भागों में भौमजल संचयों की स्थिति अच्छी दिखाई देती है।

## Abstract

**Situation of ground water in southern region of Jhabua district.** *By* R. D. Tapi, Geology Department, Holkar Science College, Indore and S. K. Shah, Government Postgraduate College, Jhabua (M. P.)

From close observations in the field, it came to our knowledge that the flow of groundwater in the southern part of Jhabua district is in the directions indicated by the flow lines of Mod and Hathni streams. Bedding planes, schistosity, joint and fracture planes greatly control this flow of groundwater. Higher groundwater gradients have been detected in the Bhabra area as compared to Ranapur area. A comparatively high range of fluctuation of groundwater level has been observed over

phyllites in Ranapur as compared to Bhabra area. A good groundwater potential can be expected in the lowlying areas of Ranapur.

झाबुआ जिले के दक्षिणी भाग में भौमजल वैज्ञानिक अध्ययन से भौमजल की परिस्थिति, प्रवाह एवं भौमजल स्तर के उतर-चढ़ावों से सम्बन्धित महत्वपूर्ण तथ्य एकत्रित किए गए हैं। अध्ययन क्षेत्र सर्वे ऑफ इंडिया स्थलाकृतिक मानचित्र क्र० 46 जे/6,7,10 और 11 में अक्षांश/22°15′ उ० से अक्षांश 22°45′ उ० तक तथा 74°15′ पू० देशांश से देशांश 74°45′ पू० तक विस्तृत है। (चित्र 1)

भू-वैज्ञानिक दृष्टिकोण से, इस भू-भाग में पुरा-कैम्ब्रियन महाकल्प के शैलक्रम तथा पट्टित नाइसी जटिल, अरावली समूह के शैल पाए जाते हैं। इन शैलक्रमों पर क्रिटेशस कल्प के बाघ/लमेटा समूह के शैल पाए जाए हैं। इन शैलों पर दक्कन ट्रैप समूह के बेसाल्टी लावा प्रवाह पाये जाते हैं। नदी घाटियों के तटीय भागों पर कहीं कहीं स्थानीय बालू और जलोढक मिट्टियों के संचय हैं। भू-आकृतिक दृष्टिकोण से यह क्षेत्र मालवा के पठार का पूर्वी ढालू प्रदेश है। उत्तर-पश्चिम में अरावली की पहाड़ियाँ हैं और पश्चिम की ओर गुजरात का मैदानी तटीय भू-भाग है। मोड और ड्सी बड़ी सरिताएँ क्षेत्र के प्रमुख जल प्रवाह को निरूपित करती हैं। मोड़ नदी अनास नदी की उपसरिता है। फरवरी-मार्च महीनों में ये उपसरिताएँ पूर्ण रूप से शुष्क हो जाती हैं।

क्षेत्र के रेखण-मानचित्रों से यह स्पष्ट होता है कि भौमजल संचय के दृष्टिकोण से रानापुर-भाभरा क्षेत्र काफी महत्वपूर्ण है। भाभरा क्षेत्र में करीब 30 तालाब/डबरे तथा रानापुर क्षेत्र में करीब 20 तालाब/डबरे भौमजल कृत्रिम पुनर्भरण के अच्छे उपकरण हैं। तालाबों से सिंचाई (लगभग 200 हे०) रानापुर में भाभरा (लगभग 30 हे०) की तुलना में अधिक की जाती है। भौमजल संचयन क्षेत्र रानापुर में लगभग 357.29 वर्ग कि०मी० तथा भाभरा क्षेत्र में लगभग 269.21 वर्ग कि०मी० आँका गया है।

**भौमजल की परिस्थितियाँ**

स्तरित शैल विज्ञान के आधार पर इस संपूर्ण क्षेत्र में भौमजाल संचय के प्रमुख तीन संचय वर्ग किये गए हैं :—

(1) ग्रेनाइट जटिल एवं अरावली शैल संचय समूह।

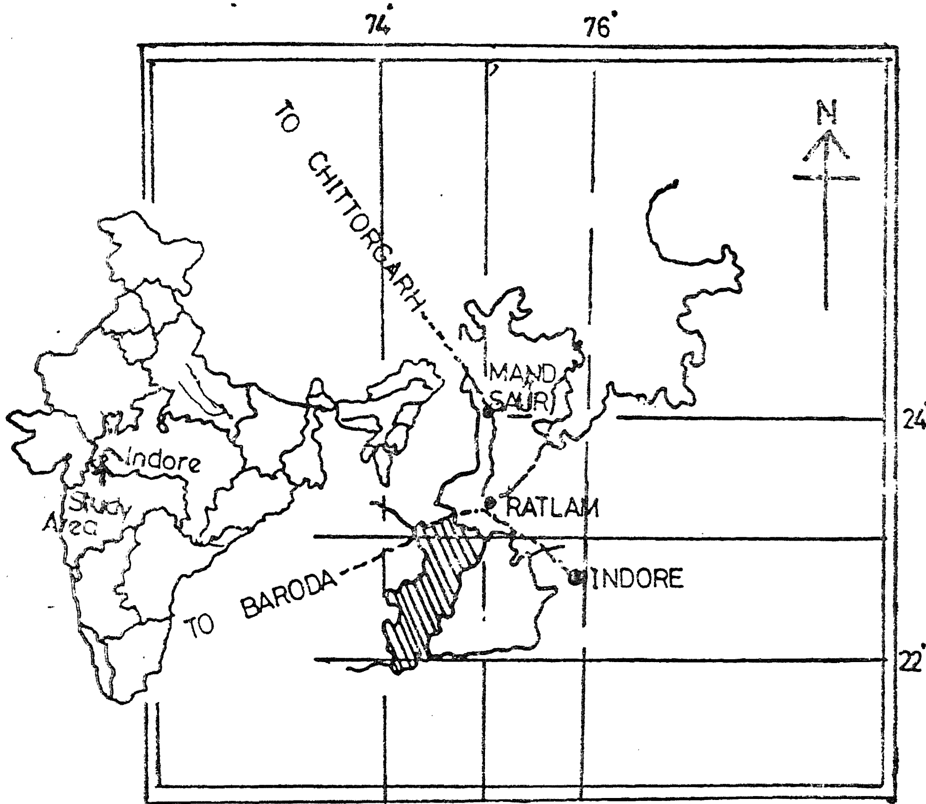
(2) निमाड़ बालूकाश्म, लमेटा/बाघ शैल संचय समूह।

(3) दक्कन-ट्रैप लावा प्रवाह संचय समूह।

सभी तीनों संचय प्रकारों का पृथक अध्ययन किया जाना आवश्यक है। अरावली क्वार्ट्जाइट तथा नाइसी जटिल शैल अत्यंत कठोर, संपिडत हैं तथा इनमें प्राथमिक रन्ध्र बिल्कुल भी नहीं हैं। ये शैल तीव्र वलन, भ्रंशन और अपरूपण से प्रभावित हैं। विरूपण कृत द्वितीयक रन्ध्र एवं गुहिकाएँ ही शैलों को रन्ध्रता प्रदान करती हैं। इन रन्ध्रों का असमान वितरण भौमजल प्रवाह और संचयों की स्थिति की पहिचान कठिन कर देता है। बड़ी डाइक भित्तियाँ, बडे सिलिसी भू-भ्रंश तल, स्फटिक भित्तियाँ

भौमजल संचयों का बडे पैमाने पर विभाजन करते हैं। प्राचीन कठोर शैलों से आच्छादित क्षेत्र में अधिकांश कुएँ, निम्न द्रोणियों एवं घाटी ढालों पर स्थित हैं। टीले एवं पठारी भाग में कुओं की पूर्ण अनुपस्थिति पाई जाती है।

निमाड बालुकाश्म और बाघ शैलों में भौमजल संचय की स्थितियाँ काफी बेहतर हैं। इन शैलों से आच्छादित क्षेत्रों में जलप्रवाह संस्तर तल एवं संधियों द्वारा नियंत्रित होता है। न्यून ढाल एवं निम्न वेदिकाओं पर उथले कुओं की स्थिति है। भौमजल स्तर का उतार-चढाव अन्य संचयों कीतुलना में अधिक दृष्टिगोचर होता है।




चित्र 1

दक्कन ट्रैप बेसाल्टी लावा प्रवाहों में भौमजल की स्थिति पुराने सभी शैलों से बेहतर है। इनमें भौमजल परिस्थितियाँ स्थानीय परिस्थिति के अनुरूप बदलती हैं। अपक्षयित, रन्ध्रमय, स्फोटगर्ती, तीव्र संधियुक्त परतों वाले प्रवाह जल के अच्छे संचायक हैं। बेसाल्टी प्रवाहों पर सपाट सतहें वेदिकाएँ और न्यून ढालू जमीन कुएँ खोदने के योग्य स्थल हैं। इस क्षेत्र के बेसाल्टी प्रवाहों से निर्मित ऊँचे मैदानों की

तुलना में निचले मैदानों में अधिक जनसंख्या पाई जाती है। इसका कारण निचले मैदानी भागों में भौमजल की प्रचुर उपलब्ध राशियाँ हैं।

नदी-घाटियों के पार्श्व भागों में कहीं कहीं 2 से 3 मीटर तक मोटी जलोढक मिटि्टयों की परतें अथवा टीले गुटिका-स्तर पाए जाते हैं। बाघ संस्तर के ऊपरी भाग में स्थित संगुटिकाश्म कठोर एवं सीमेंटीभूत नहीं हैं वरन् रन्ध्रमय हैं। इस शैल की मोटाई कुछ सेन्टीमीटर से लेकर 2 मीटर तक देखी गई है। इस परत में भी भौमजल संचय की अच्छी संभावनाएँ हैं। बेसाल्टी लावा-प्रवाह और निचले शैलक्रम जहाँ भी संपर्क में आते हैं वहाँ भौमजल के अच्छे रिसाव एवं झरने दृष्टिगोचर होते हैं।

दक्कन ट्रैप, प्रवाह, आर्कियन दृश्यांशों को घेरते हुए ऊँची पहाडियों, तरंगित सतहों, पहाडियों के न्यून ढालों के रूप में पाये जाते हैं। ढालों के निचले भागों में कई अवनालिकायें (Gullies) विकसित हुई हैं। बरसात में वर्षा जल निचले ढलानों एवं मैदानी भागों में संचित होता है और अनास तथा हथनी नदीतन्त्र के द्वारा वाहीजल (Runoff) के रूप में स्थानान्तरित होता है। आर्कियन टीलों एवं ऊँचे पठारी भागों पर बजरी एवं गुटिका युक्त मिट्टियों के संचय पाये गये हैं तथा ढालों पर बालुका-लोम या मृण्मय मिट्टियों की परतें एवं घनी वनस्पति पाई जाती है, जल निस्यंदन (Infiltration) के अच्छे स्थल सिद्ध हुए हैं। दक्कन ट्रैप लावा प्रवाहों पर स्थित ऊँचे मैदानी भागों में जल निस्यंदन के लिए उपयुक्त परिस्थितियाँ हैं, किन्तु निस्यंदित जल की अधिकांश मात्रा निचले भागों में प्रवाह एवं प्राचीन शैल संपर्क तलों से होकर पुनः झरनों से वाहीजल के रूप में प्रवाहित हो जाता है और जल की क्षति हो जाती है।

**कुँओं की सांख्यिकी**

कुँओं की गहराई 4 मीटर से 16 मीटर तक के परिसर में मापी गई है। 60 प्रतिशत से भी अधिक कुँओं में गहराई का परिसर 6 से 10 मीटर है। अधिकतम गहरे कुँए ग्रेनाइट, नीस तथा फिलाइट से आच्छादित क्षेत्रों में पाये गए हैं। दक्कन ट्रैप लावा प्रस्तरों में भी कहीं कहीं गहरे कुँए दृष्टिगोचर होते हैं। फिलाइट की तुलना में गहरे कुँओं की सर्वाधिक संख्या नीस शैल क्षेत्रों में पाई गई है। फिलाइट, निमाड, बालुकाश्म, दक्कन ट्रैप सभी शैल समूहों में स्थिति अधिकांश कुँओं की सार्वजनिक गहराई 4 से 6 मीटर तक देखी गई है। दक्कन ट्रैप पर स्थित कुँओं में सर्वाधिक गहराई 12 मीटर और न्यूनतम गहराई 4 मीटर तक मापी गई है। निमाड़ बालुकाश्म में (4 मीटर के कम गहरे) केवल उथले कुँए ही देखे गए हैं (सारणी 1)।

रानापुर क्षेत्र में 2.05 मीटर से 8.00 मीटर तक तथा भाभरा क्षेत्र में 2.90 मीटर से 12.00 मीटर तक व्यास वाले कुँए देखे गए। सर्वाधिक व्यास (15.00 मीटर) के कुँओं को दक्कन ट्रैप की भूमि पर रूपाखेडा के समीप देखा गया। न्यूनतम व्यास (2.05 मीटर) का कुँआ फिलाइट पर मेंडा के समीप पाया गया। (सारणी 2)।

सारणी 1

कुँओं की गहराई (मीटर में)

| क्षेत्रों के नाम | सीमा | फिलाइट | | नीस | | निमाड बालुकाश्म | | दक्कन ट्रैप | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | गहराई | स्थानीय नाम | गहराई | स्थानीय नाम | गहराई | स्थानीय नाम | गहराई | स्थानीय नाम |
| रानापुर | न्यूनतम | 3.20 | डोटल | — | — | 4.6 | हाथीपुरा | 3.8 | छापरी |
| | अधिकतम | 14.20 | मांडली लालजी | — | — | 13.40 | भौरकुँण्डिया | 11.70 | भूररीमाटी |
| भाभरा | न्यूनतम | 5.10 | छोटी करेंटी | 4.65 | बिलझर | 6.65 | गेंरूघाटी | 6.60 | डुँगलावानी |
| | अधिकतम | 11.10 | सोजा-वाडा | 10.70 | बेहाडवा | — | — | 9.45 | सांडा |

**सारणी 2**

कुँओं का व्यास (मीटरों में)

| क्षेत्रों के नाम | सीमा | फिलाइट | | नीस | | निमाड बालुकाश्म | | दक्कन ट्रैप | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | गहराई | ग्राम | गहराई | ग्राम | गहराई | ग्राम | गहराई | ग्राम |
| रानापुर | न्यूनतम | 2.9 | जुनागाँव | — | — | 3.10 | हाथीपुरा | 4.00 | भूरीमाटी |
| | अधिकतम | 9.80 | सोतिया जलान | — | — | 5.3 | केडिया | 11.5 | रूपाखेडा |
| भाभरा | न्यूनतम | 2.5 | मेंडा | 3.00 | बिलझर | 5.4 | गेऊघाटी | 4.45 | अमृतकुँआ |
| | अधिकतम | 6.10 | टिटांबा | 6.9 | किलाना | 5.4 | गेंऊघाटी | 8.0 | डुँगलावानी |

सारणी 3

कुँओं में जलस्तर तक गहराई (मीटरों में)
(मानसून-पूर्व)

| क्षेत्रों के नाम | सीमा | फिलाइट | | नीस | | निमाड बालुकाश्म | | दक्कन ट्रैप | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | गहराई | ग्राम | गहराई | ग्राम | गहराई | ग्राम | गहराइ | ग्राम |
| रानापुर | न्यूनतक | 3.0 | जुनगाँव | — | — | 4.03 | हाथीपुरा | 3.30 | छपरी |
| | अधिकतम | 12.20 | टोडी | — | — | 11.89 | बोरकुँडिया | 11.50 | भूरीमाटी |
| भाभरा | न्यूनतम | 4.40 | छोटी | 3.95 | बिलझरी | 5.95 | गेऊघाटी | 4.70 | डुँगावानी |
| | अधिकतम | 10.75 | सेजावाडा | 9.95 | कालीयावड | 5.95 | गेंऊघाटी | 8.95 | सांडा |

**सारणी 4**

कुँओं में जल स्तर तक गहराई (मीटरों में)

| क्षेत्रों के नाम | सीमा | फिलाइट | | नीस | | निमाड बालुकाश्म | | दक्कन ट्रैप | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | गहराई | ग्राम | गहराई | ग्राम | गहराई | ग्रास | गहराई | ग्राम |
| रानापुर | न्यूनतम | 0.9 | डोटड | — | — | 1.2 | हाथीपूरा | 2.2 | डिग्गी |
| | अधिकतम | 10.0 | झगोला | — | — | 6.00 | बोरकुँडिया | 8.3 | धामनी कटरा |
| भाभरा | न्यूनतम | 2.10 | छोटी करेंटी | 2.10 | बिलझा | 3.10 | गेऊघाटी | 3.10 | डुंगलावानी |
| | अधिकतम | 10.0 | सेजावाडा | 8.0 | कालियावड | — | — | 7.25 | सान्डा |

सारणी -5

कुँओं के जल स्तर में उतार-चढ़ाव (मीटरों में)
मानसून पूर्व एवं मानसून पश्चात्

| क्षेत्रों के नाम | सीमा | फिलाइट | | नीस | | निमाड बालुकाश्म | | दक्कन ट्रैप | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | गहराई | ग्राम | गहराई | ग्राम | गहराई | ग्राम | गहराई | ग्राम |
| रानापुर | न्यूनतम | 0.05 | धामनी नाथ | — | — | 1.80 | छपरखेडा | 0.15 | कंजवानी मिर्धा |
| | अधिकतम | 6.30 | गंसर | — | — | 5.89 | भोर कुँडिया | 5.25 | पडलवा |
| भाभरा | न्यूनतम | 0.70 | रिंगोल | 0.35 | छोटी पोल | 2.85 | गेंऊघाटी | 1.6 | डुँगलावानी |
| | अधिकतम | 2.70 | माल | 4.0 | कुछी | — | — | 2.15 | अमनकुँआ |

सारणी 6

शैल समूहों में जलस्तर के उतार-चढ़ाव की आवृत्तियों का विश्लेषण (मीटर में)

| क्षेत्रों के नाम | परिसर | फिलाइट | नीस | निमाड बालुकाश्म | दक्कन ट्रैप | योग |
|---|---|---|---|---|---|---|
| रानापुर | 0-3 | 22 | निरंक | 03 | 12 | 37 |
| | 3-6 | 10 | निरंक | 01 | 05 | 16 |
| | 6-9 | 01 | निरंक | निरंक | निरंक | 01 |
| भाभरा | 0-3 | 12 | 20 | 01 | 04 | 37 |
| | 3-6 | निरंक | 01 | निरंक | निरंक | 01 |
| | 6-9 | निरंक | निरंक | निरंक | निरंक | निरंक |
| योग | — | 45 | 21 | 04 | 21 | |

फिलाइट तथा दक्कन ट्रैप के क्षेत्र के अधिकांश कुँओं में जल स्तर की गहराई 3.0 मीटर से 12.00 मीटर तक मापी गई। जल स्तर की सर्वाधिक गहराई ग्रेनाइट-नीस पर स्थित कुँए में मापी गई रानापुर एवं भाभरा दोनों क्षेत्रों में गहराई का परिसर 6 मीटर से 9 मीटर तक सामान्य रूप से देखा गया। जलस्तर की न्यूनतम गहराई 3.0 मीटर जुनगाँव के समीप के कुँए में मानसून पूर्व एवं 0.9 मीटर डोटड़ के समीपस्थ कुँए में मानसून पश्चत् मापी गई। जलस्तर की अधिकतम गहराई 12.2 मीटर टोडी के समीप मानसून पूर्व तथा 10.0 मीटर झगोला के समीप फिलाइट पर स्थित कुँए में मापी गई (सारणी 3-4)।

क्षेत्र के फिलाइट एवं निमाड बालुकाश्म शैल समूहों पर स्थित कुँओं में जल स्तर में उतार-चढ़ाव सर्वाधिक दृष्टिगोचर होता है। यह उतार-चढ़ाव रानापुर क्षेत्र में 7 मीटर से 9 मीटर तक तथा भाभरा क्षेत्र में 1 मीटर से 6 मीटर तक देखा गया। नीस शैल समूह के कुँओं में उतार-चढ़ाव अति उच्च सीमा तक होता पाया गया है। निमाड बालुकाश्म पर कुँओं में जल स्तर में कोई विशेष उतार-चढ़ाव होत नहीं दिखाई देता है। क्षेत्र में पूर्व एवं पश्च मानसून के बीच जल स्तर में न्यूनतम उतार-चढ़ाव 0.05 मीटर धामनीनाथ के पास (रानापुर) तथा 0.07 मीटर रिंगोल के पास (भाभरा) देखा गया। इसी प्रकार अधिकतम उतार-चढ़ाव 6.30 मीटर गंसर के समीप (रानापुर) तथा 4. मीटर भाभरा के समीप पाया गया (सारणी 5-6)।

पब्लिक हेल्थ इंजीनियरिंग डिपार्टमेंट (P. H. E. D.) तथा अन्य एजेंसियों व्दारा वेधित पाताली कुँओं में से अधिकाँश कुँए शुष्क ही रहे और अभी भी पाताली कुँओं के निर्माण की कोई ठोस योजना लागू नहीं हो सकी है। गोसर, रूपाखेडा, मालियाझिर, तोलियावाड (रानापुर में) तथा बरझर, छोटी पोल, छोटी मालपुर, मेंडा (भाभरा में) इत्यादि स्थानों पर अन्वेषक कुँए वेधित किए जा सकते हैं। भौमजल की उपलब्धता की दृष्टि से कुंजवानी, मिर्चा झगोला, कुँजवानी खास (रानापुर में), दुग्धा-वानी, अमनकुँआ, मथाना, गेरुघाटी, रिंगोल, सेजवाड़ा, कालिया बड़ा, खुटान्जा, बोर कुण्डिया (भाभरा में) इत्यादि स्थानों पर गहरे पाताली कुँए खोदे जा सकते हैं।

## कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोध प्रपत्र में कुँओं की सांख्यिकी सम्बन्धी आँकडे उपलब्ध कराने के लिए झाबुआ जिला सांख्यिकी विभाग और ट्यूबवेल तथा सिचाई विभाग के प्रति आभार प्रकट करते हैं।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol, 37, No. 3, 1994

# प्रतिचित्रणों के अनुक्रम का अभिसरण एवं सम परिवेश समष्टियों में स्थिर बिंदु

श्याम लाल सिंह, वीरेन्द्र तथा विजयेन्द्र कुमार
गणित विभाग. गुरुकुल काँगड़ी विश्वविद्यालय, हरिद्वार, 249404

[ प्राप्त—अप्रैल 7, 1993 ]


## सारांश

माना कि $P,S,T,P_nT_n(n=1,2,...)$ सम परिवेश समष्टि पर प्रतिचित्रण हैं तथा $u$ प्रतिचित्रणों $P,S,T$ का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है और $u_n$ प्रतिचित्रणों $P_n,S_n,T_n(n=1,2,...)$ का स्थिर बिंदु है। इस शोधपत्र में उन शर्तों का अध्ययन किया है जिनके अधीन प्रतिचित्रण अनुक्रमों $\{P_n\}$, $\{S_n\}$ और $\{T_n\}$ के क्रमश: $P,S$ और $T$ को (बिंदुश: अथवा एक समान रूप से) अभिसरित होने की स्थिति में स्थिर बिंदु अनुक्रम $\{u_n\}$ बिंदु $u$ को अभिसरित होता है।

## Abstract

**Convergence of Sequences of Mappings and Fixed Points in Uniform Spaces.** ***By*** S. L. Singh, Virendra and Vijayendra Kumar, Department of Mathematics, Gurukula Kangri Vishwavidyalaya, Hardwar 249 404.

Let $P,S,T,P_n$, $S_n,T_n$, $(n=1,2,...)$ be mappings on a uniform space. Further let $u$ be a common fixed point of $P,S,T$ and $u_n$ be a common fixed point of $P_n,S_n,T_n$, $n=1,2,...$ In this paper we study the conditions under which $\{u_n\}$ converges to $u$, if the sequence of mappings $\{P_n\}$, $\{S_n$ and $\{T_n\}$ converges (pointwise or uniformly) respectively to $P,S$ and $T$.


## 1. प्रारंभिकी

अनेक गणितज्ञों ने ऐसी प्रतिबंध का अन्वेषण किया है जिनके अधीन यदि किसी दूरीक समष्टि पर प्रतिचित्रणों का अनुक्रम किसी प्रतिचित्रण $T$ पर अभिसरित होता हो, तो प्रतिचित्रणो के अनुक्रम के

स्थिर बिंदु का अनुक्रम $T$ के स्थिर बिंदु पर अभिसरित होता है। इस अन्वेशण के प्रारंभ करने का श्रेय प्रोफेसर एफ॰ एफ॰ बोन्साल को प्राप्त है, वास्तव में उन्होंने ही सर्वप्रथम सिद्ध किया कि—

मान लें $E$ एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा लिपशिट्ज स्थिरांक $k<1$ के साथ $E$ पर $T_n(n=1, 2,...)$ ऐसे संकुचन स्व-प्रतिचित्रण हैं जिनके स्थिर बिंदु $u_n(n=1,2,...)$ हैं। मान लें $E$ के प्रत्येक $x$ के लिए सीमा $_nT_nx=Tx$, जहाँ प्रतिचित्रण $T$ दूरीक समष्टि $E$ पर स्व-प्रतिचित्रण है। तब $T$ के अद्वितीय स्थिर बिंदु $u$ का अस्तित्व है तथा वह इस प्रकार है कि सीमा $_nu_n=u$.

इस परिणाम को अनेक विन्यासों के लिए उन्नत और व्यापकीकृत किया गया है। नैडलर [7] ने प्रेक्षित किया कि प्रत्येक संकुचन प्रतिचित्रण के लिए समान लिपिशिट्ज स्थिरांक $k<1$ होने का प्रतिबंध कठोर है और उन्होंने इस प्रतिबंध को समाप्त किया।

मिश्रा[6] ने प्रो॰ बोन्साल के परिणाम को सम परिवेश समष्टि के लिए विस्तारित किया ( [2] और [9] भी देखें) एवं सिंह तथा मिश्रा[13] ने सम परिवेश समष्टियों पर प्रतिचित्रण युगल के लिए अभिसरण प्रमेय की स्थापना की (नीचे (1.1) और (2.1) देखें)।

इस प्रपत्र में हम सम परिवेश समष्टियों पर प्रतिचित्रण-अनुक्रम के युगल और त्रिक के अभिसरण का अध्ययन करेंगे।

## 2. सांस्थितिक प्रारंभिकी

माना कि $(X,u)$ ऐसा समपरिवेश समष्टि (देखें केली [5.1]) है जो $X$ पर छद्मदूरीक कुल $D=\{d_i : i \in I,$ सूचीकरण समुच्चय$\}$ से परिभाषित है, हम निम्नलिखित संकेती का प्रयोग करेंगे।

$$V_{(d_i,r)}=\{(x,y) : x,y \in X,\ d_i(x,y)<r, r>0\}$$

और

$$G=\{V : V=\bigcap_{i\in F} V_{(d_i,r_i)}, d_i \in D, r_i>0, F\subseteq I, F \text{ परिमित है}\}\text{।}$$

$$V=\bigcap_{i \in F} V_{(d_i,r_i)} \in G, \text{ के लिए माना}$$

$$sV=\begin{cases} \bigcap_{i\in F} V(d_i, sr_i), & \text{यदि } s>0 \\ (\text{विकर्ण}) & \text{यदि } s=0. \end{cases}$$

$G$ में मनमाने $V$ के लिए $X$ पर छद्मदूरीक समष्टि $p$ का इस प्रकार अस्तित्व है कि $V=V_{(p,1)}$। ऐसे $p$ को $V$ का मिन्कोव्स्की छद्मदूरीक कहते हैं। सांस्थितिक प्रारंभिकी के विस्तृत विवरण के लिए केली[5] और आचार्या[1] देखें।

3. परिणाम

सिंह तथा मिश्रा[13] ने निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किये हैं—

**प्रमेय 1.** माना कि हाउसडोर्फ सम परिवेश समष्टि $X$ पर $z_n$ उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु वाले प्रतिचित्रण $S_n$ व $T_n$ हैं, $n=1,2...$, तथा ऋणेतर वास्तविक संख्याओं $a_i(i=1,2,...5)$, $a_3+a_4+a_5<1$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $V_i \in G$ $(i=1,2,...5)$ और $x,y \in X$ के लिए

$$(S_n x, S_n y) \in a_1V_1 \circ a_2V_2 \circ a_3V_3 \circ a_4V_4 \circ a_5V_5 \quad (1.1)$$

यदि

$(S_n x, T_n x) \in V_1, (S_n y . T_n y) \in V_2 (S_n x, T_n y) \in V_3,$

$(S_n y, T_n x) \in V_4$ और $(T_n x, T_n y) \in V_5.$

यदि क्रमशः अनुक्रमों $\{S_n\}$ व $\{T_n\}$ का बिंदुशः अभिसरण उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु $z$ वाले प्रतिचित्रणों $S,T : X \to X$ को होता है, तब $z_n \to z$.

**प्रमेय 2.** माना कि हाउसडोर्फ सम परिवेश समष्टि $X$ पर $z_n$ उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु वाले प्रतिचित्रण $S_n$ व $T_n$ हैं, $n=1,2...$, तथा $V_i \in G(i=1,...5)$ और $x,y \in X$ के लिए $z$ उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु वाले प्रतिचित्रण $S,T : X \to X$ इस प्रकार हैं कि

$$(Sx,Sy) \in a_1V_1 \circ a_2V_2 \circ a_3V_3 \circ a_4V_4 \circ a_5V_5, \quad (2.1)$$

यदि

$(Sx,Tx) \in V_1$, $(Sy,Ty) \in V_2$, $(Sx,Ty) \in V_3$,

$(Sy,Tx) \in V_4$ और $(Tx,Ty) \in V_5$,

जहाँ $a_i(i=1,...5)$ ऋणेतर वास्तविक संख्याएँ $a_3+a_4+a_5<1$ को संतुष्ट करती हैं। यदि $\{S_n\}$ व $\{T_n\}$ क्रमशः $S$ और $T$ को एकसमान रूप से अभिसरित होते हैं तो $z_n \to z$.

(1.1) और (2.1) शर्तों को सम परिवेश समष्टियों पर व्यापकीकृत युंक संकुचन शर्तें कहते हैं। ये शर्तें युंक[4] के अनुसार दूरीक समष्टि $(E,d)$ पर प्रतिचित्रणों $S,T : E \to E$ से प्रेरित हैं, जहाँ

$$d(Sx,Sy) \leqslant kd(Tx,Ty), \; x,y \in E, \; 0<k<1.$$

दूरीक समष्टि में युंक प्रतिचित्रणों के विस्तृत अध्यय के लिए सिंह[10] देखें। यदि प्रतिचित्रण $S$ व $T$ शर्त (2.1) को संतुष्ट करें, क्रमविनिमयी हों तथा $S(X \subseteq T(X)$, तो अनुक्रमतः पूर्ण हाउसडोर्फ समष्टि $X$ में प्रतिचित्रणों $S$ व $T$ का एक अद्वितीय स्थिर बिंदु प्राप्त होगा बशर्ते कि $T$ संतत हो और

$$0<a_1+a_2+a_9+a_4+a_5<1, \text{ (देखें [11])।}$$

अभिसरण प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए नैडलर[7] और सेअड्स्[8,9] सहित अधिकांश गणितज्ञों ने प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व के लिए आवश्यक समस्त शर्तों का प्रयोग किया है परंतु हमने इन प्रमेयों में केवल प्रतिचित्रणों $S_n, T_n$ और $S,T$ के उभयनिष्ठ स्थिर बिंदुओं के अस्तित्व को माना है । यह तथ्य निम्न उदाहरण से स्पष्ट है ।

**उदाहरण** [1] माना कि सामान्य परिवेष्टक के साथ $X-[G,2]$ पर एक सम परिवेश समष्टि है । प्रतिचित्रन $S_n$ व $T_n$ निम्न प्रकार पारिभाषित है :

$$S_nx=1+x/(2n+2) \text{ और } T_nx=\{n/(n+1)\}x+2/(2n+1)$$

$n=1,2,\ldots$ तब $S_n$ व $T_n$ का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु $z_n=(2n+2)/(2n+1)$ $(n=1,2,\ldots,)$ है तथा $X$ के प्रत्येक बिंदु $x$ के लिए $Sx=1$ और $Tx=x$ । इस प्रकार $z_n \to z=1$ । यह आसानी से देखा जा सकता है कि $S_n$ व $T_n$ ऋणेतर संख्याएँ

$a_i=0$ $(i=1,\ldots4)$, $a_5 \in [1/2,1)$ के साथ $X$ के सभी बिंदुओं $x,y$ के लिए (1.1) को संतुष्ट करते हैं । स्पष्टत: $S_n$ व $T_n$ क्रमविनिगयी नहीं हैं ।

अब हम तीन प्रतिचित्रण अनुक्रमों के लिए अभिसरण प्रमेयों का अध्ययन करेंगे ।

**प्रमेय 3.** माना कि $P_n, S_n$ व $T_n$ हाउसडोर्फ सम परिवेश समष्टि $X$ पर $z_n(n=1,2\ldots)$ उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु वाले प्रतिचित्रण हैं तथा $G$ में $V_i(i=1,\ldots5)$ और $x,y \in X$ इस प्रकार है कि

$$(P_nx, P_ny) \in a_1V_1 \circ a_1V_2 \circ a_3V_3 \circ a_4V_4 \circ a_5V_5 \tag{3.1}$$

यदि

$$(P_nx,S_nx) \in V_1,\ (P_ny,T_ny) \in V_2,\ (P_nx,T_ny) \in V_3,\ (P_ny,S_nx) \in V_4 \text{ और } (S_nx,T_ny) \in V_5,$$

जहाँ

$$a_1=a_1(x,y),\ a_2=a_2(x,y),\ a_3=a_3(x,y),\ a_4=a_4(x,y),\ a_5=a_5(x,y)$$

$x$ व $y$ के ऐसे ऋणेतर फलन हैं कि

$$0<\text{उच्चतर}_{\,x,y \in X}\{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\}=h<1. \tag{3.2}$$

यदि $P,S,T: X \to X$ क्रमशः $\{P_n\}$, $\{S_n\}$ व $\{T_n\}$ के बिंदुशः सीमा प्रतिचित्रण हों और $z$ प्रतिचित्रणों $P,S$ व $T$ का एक उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु हो तब $z_n \to z$.

**उपपत्ति** मान लें $V \in G$ मनमाना है तथा $V$ का मिन्कोव्स्की छद्मदूरीक $p$ है और $x,y$ समष्टि $X$ में हैं । माना कि

$$p(P_nx, S_nx)=s_1,\ p(P_ny, T_ny)s_2,\ p(P_nx, T_ny)=s_3,$$

$$p(P_ny, S_nx)=s_4 \text{ और } p(S_nx, T_ny)=S_5 \text{ और } \epsilon>0.$$

तब

$$(P_nx, S_nx)\in V_{(p,s_1+\epsilon)}, (P_ny, T_ny)\in V_{(p,s_2+\epsilon)}$$

$$(P_nx, T_ny)\in V_{(p,s_3+\epsilon)}, (p_ny, S_nx)\in V_{(p,s_4+\epsilon)}$$

और

$$(S_nx, S_ny)\in V_{(p,s_5+\epsilon)}.$$

इसलिए (3.1) से

$$(P_nx, P_ny)$$

$$\in a_1(s_1+\epsilon)V^\circ a_2(s_2+\epsilon)V^\circ a_3(s_3+\epsilon)V^\circ a_4(s_4+\epsilon)V^\circ$$

$$a_5(s_5+\epsilon)V$$

अत:

$$p(P_nx, P_ny)<a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3+a_4s_4+a_5s_5+h\epsilon.$$

चूंकि $\epsilon>0$ मनमाना है, अत:

$$p(P_nx, P_ny)\leqslant a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3+a_4s_4+a_5s_5 \tag{3.3}$$

$$\leqslant h \text{ अधिकतम } \{p(P_nx, S_nx), p(P_ny,T_ny), p(P_nx,T_ny), p(P_ny,S_nx),$$

$$p(S_nx,T_ny)\}.$$

अत: किसी $n$ के लिए (3.3) से

$$p(u_n,u)\leqslant p(P_nu,u)+p(P_nu_n,P_nu)$$

$$\leqslant p(P_nu,u)+h \text{ अधिकतम } \{p(P_nu,T_nu), p(u_n,T_nu), p(u_n,P_nu)\}.$$

अस्तु किसी $n$ के लिए या तो

$$p(u_n,u)\leqslant p(P_nu,u)+hp(P_nu,T_nu)$$

$$\leqslant(1+h)p(P_nu,Pu)+hp(T_nu,Tu); \tag{A}$$

अथवा

$$p(u_n,u)\leqslant p(P_nu,u)+hp(u_n,T_nu)$$

$$\leqslant p(P_nu,u)+h[p(u_n,u)+p(u,T_nu)]$$

अर्थात् $(1-h)p(u_n, u) \leqslant p(P_n u, Pu) + hp(T_n u, Tu)$; (B)

अथवा इसी प्रकार

$$(1-h)p(u_n, u) \leqslant (1+h)p(P_n n, Pu). \tag{C}$$

चूँकि $\{P_n\}$ व $\{T_n\}$ क्रमशः $P$ और $T$ को बिंदुशः अभिसरित होते हैं, इसलिए $\in_1, \in_2 > 0$ और बिंदु $u$ के लिए ऐसे धनात्मक पूर्णांक $N_1$ व $N_2$ अस्तित्व में आते हैं कि

$p(P_n u, Pu) < \in_1$ सभी $n \geqslant N_1$ के लिए

और

$p(T_n u, Tu) < \in_2$ सभी $n \geqslant N_2$ के लिए

अब मान लें

$N=$अधिकतम $\{N_1, N_2\}$ और $(\in/M)=$अधिकतम $\{\in_1, \in_2\}$

जहाँ

$M=$अधिकतम $\{(1+2h), (1+h)/(1-h)\}$.

अतः

$(A)-(C)$ की प्रत्येक स्थिति में सभी $n \geqslant N$ के लिए

$p(u_n' u < \in'$.

चूँकि $V$ मनमाना है और समष्टि हाउसडोर्फ हैं, अतः $u_n \to u$.

**प्रमेय 4.** माना कि $P_n, S_n$ व $T_n$ हाउसडोर्फ सम परिवेश समष्टि $X$ पर $z_n(n=1,2,\ldots$ उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु वाले प्रतिचित्रण हैं तथा $V_i \in G(i=1.2,\ldots,5)$ और $x,y \in X$ के लिए $z$ उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु वाले प्रतिचित्रण $P,S,T: X \to X$ इस प्रकार हैं कि

$$(Px,Py) \in a_1 V_1 \circ a_2 V_2 \circ a_3 V_3 \circ a_4 V_4 \circ a_5 V_5. \tag{4.1}$$

यदि

$(Px,Sx) \in V_1$, $(Py,Ty) \in V_2$, $(Px, Ty) \in V_3$, $(Py, Sx) \in V_4$ और $(Sx,Ty) \in V_5$,

जहाँ सभी $a_i$ शर्त (3.2) को संतुष्ट करते हैं, यदि $\{P_n\}$, $\{S_n\}$ व $\{T_n\}$ क्रमशः $P,S$ व $T$ को एक समान अभिसरित होते हों तब $z_n \to z$.

**उपपत्ति** : माना कि $V \in G$ मनमाना है और $V$ का मिन्कोव्स्की छद्मदूरीक $p$ है। मान लें $x,y \in X$। तब प्रमेय 3 की उपपत्ति का अनुसरण करके

$$p(Px,Py) \tag{4.2}$$

$\leqslant h$ अधिकतम $\{p(Px,Sx), p(Py,Ty), p(Px,Ty), p(Py,Sx), p(Sx,Ty)\}$

सिद्ध किया जा सकता है।

उपपत्ति का शेषांश [12, प्रमेम 1] की उपपत्ति का अनुसरण करके पूरा किया जा सकता है।

प्रमेय 5. यदि प्रमेय 3 की शर्त (3.1) के स्थान पर
जहाँ

$$(P_n x,T_n x)\in V_1,\ (S_n y,T_n y)\in V_2,\ (P_n x,T_n y)\in V_3,\ (S_n y,T_n x)\in V_4 \text{ और } (T_n x,T_n y)\in V_5; \quad (5.1)$$

लें तब भी प्रमेय **3** सत्य रहती है।

उपपत्ति : माना कि $V\in G$ मनमाना है और $V$ का मिन्कोव्स्की छद्मदूरीक $p$ है। मान लें $x,y\in X$, तब, प्रमेय 3 की उपपत्ति का अनुसरण करते हुए हम प्राप्त करते हैं कि

$$p(P_n x,S_n y) \quad (5.2)$$

$$\leqslant h \text{ अधिकतम } \{p(P_n x,T_n x), p(S_n y,T_n y), p(P_n x,T_n y),$$

$$p(S_n y,T_n x), p(T_n x,T_n y)\}.$$

किसी $n$ के लिए (5.2) से,

$$p(u_n,u)$$

$$\leqslant p(P_n u_n, S_n u)+p(S_n u,u)$$

$$\leqslant h \text{ अधिकतम } \{p(S_n u,T_n u), p(u_n,T_n u), p(S_n u,u_n)\}+p(S_n u,u).$$

अतः किसी $n$ के लिए या तो

$$p(u_n,u)$$

$$\leqslant hp(S_n u,T_n u)+p(S_n u,u)$$

$$\leqslant h[p(S_n u,Su)+p(T_n u,Tu)]+p(S_n u,u)$$

(i) $$\leqslant(1+h)p(S_n u.Su)+hp(T_n u,Tu);$$

अथवा

$$p(u_n,u)$$

$$\leqslant hp(u_n,T_n u)+p(S_n u,u)$$

$$\leqslant h[p(u_n,u)+p(T_n u,u)]+p(S_n u,u)$$

अर्थात्

(ii) $(1-h)p(u_n,u)$

$$\leqslant hp(T_nu,Tu)+p(S_nu,Su);$$

अथवा इसी प्रकार

(iii) $(1-h)p(u_n,u)\leqslant(1+h)p(S_nu,Su)$.

चूँकि $\{S_n\}$ व $\{T_n\}$ क्रमशः $S$ व $T$ को त्रिदुशः अभिसरित होते हैं, इसलिए $\in_1,\in_2>0$ और बिंदु $u$ के लिए ऐसे धनात्मक पूर्णांक $N_1$ व $N_2$ अस्तित्व में आते हैं कि

$p(S_nu,Su)<\in_1$ सभी $n\geqslant N_1$ के लिए

और

$p(T_nu,Tu)<\in_2$ सभी $n\geqslant N_2$ के लिए

मान लें

$N=$अधिकतम $\{N_1,N_2\}$ और $(\in/M)=$अधिकतम $(\in_1,\in_2)$.

जहाँ

$M=$अधिकतम $\{(1+2h),(1+h)/(1-h)\}$,

अतः (i) (iii) के प्रत्येक स्थिति में. सभी $n>N$ के लिए $p(u_n,u)<\in$.

अतः सभी $n(n>N)$ के लिए $(u_n,u)\in V$ । चूँकि $V$ मनमाना हाउसडोर्फ समष्टि है अतः $u_n\rightarrow u$.

**प्रमेय 6.** यदि प्रमेय 4 की शर्त (4.1) के स्थान पर

$$(Px,Sy)\epsilon a_1V_1{}^\circ a_2V_2{}^\circ a_3V_3{}^\circ a_4V_4{}^\circ a_5V_5, \tag{6.1}$$

यदि

$(Px,Tx)\in V_1,(Sy,Ty)\in V_2,(Px,Ty)\in V_4,(Sy,Tx)\in V_4$ और $(Tx,Ty)\in V_5$; लें प्रमेय 4 तब भी सत्य रहती है ।

**उपपत्ति** : माना कि $V\in G$ मनमाना है और $V$ का मिन्कोव्स्की छद्मदूरीक $p$ है । माना कि $x,y\in X$. तब प्रमेय 3 की उपपत्ति का अनुसरण करते हुए हम प्राप्त करते हैं कि

$p(Px,Sy)$

$$\leqslant h \text{ अधिकतम } \{p(Px,Tx),p(Sy,Ty),p(Px,Ty),p(Sy,Tx),p(Tx,Ty)\}.$$

उपपत्ति का शेषांक [14, प्रमेय 1] की उपपत्ति के अनुसार पूरा किया जा सकता है ।

यह जिज्ञासा स्वाभाविक है कि तीन प्रतिचित्रणों $P,S,T : X \to X$ के उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु के अस्तित्व के लिए पर्याप्त प्रतिबंध क्या है। निम्न दो प्रमेयों में इस प्रश्न का उत्तर निहित है।

**प्रमेय 7.** माना कि अनुक्रमतः पूर्ण हाउसडोर्फ सम परिवेश समष्टि $X$ पर स्व-प्रतिचित्रण $P,S$ व $T$ इस प्रकार हैं कि $P(X) \subseteq S(X) \cap T(X)$, $PS=SP$ और $PT=TP$। मान लें $V_i \in G(i=1, 2,\ldots,5)$ व $x,y \in X$ तथा $a_3=a_4$ के लिए शर्तें (4.1) व (3.2) संतुष्ट होती हैं। यदि $S$ और $T$ संतत $P,S$ व $T$ के अद्‌वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु का अस्तित्व होता है।

उपपत्ति : माना कि $V \in G$ मनमाना है और $V$ का मिन्कोव्स्की छद्मदूरीक $P$ है। मान लें $x,y \in X$. प्रमेय 3 की उपपत्ति का अनुसरण करते हुए

$$p(Px,Py) \tag{7.1}$$

$$\leqslant h \text{ अधिकतम } \{p(Px,Sx), p(Py,Ty), \tfrac{1}{2}[p(Px,Ty)+p(Py,Sx)], p(Sx,Ty)\}$$

प्राप्त होता है।

समष्टि $X$ में कोई मनमाना बिंदु $x$ लें। चूँकि $S(X)$ व $T(X)$ में $P(X)$ अन्तर्विष्ट है, इसलिए $X$ में एक अनुक्रम $\{x_n\}$ निम्नप्रकार परिभाषित कर सकते हैं :

$$Sx_{2n-1}=Px_{2n-2},\ Tx_{2n}=Px_{2n-1},\ n=1,2,\ldots,$$

अब (7.1) से

$$p(Px_{2n}, Px_{2n-1})=p(Px_{2n-1}, Px_{2n})$$

$$\leqslant h \text{ अधिकतम } \{p(Px_{2n-1}, Px_{2n-2}), (\tfrac{1}{2})\, p(Px_{2n}, Px_{2n-2})\}.$$

$$\therefore \quad p(Px_{2n}, Px_{2n-1}) \leqslant hp(Px_{2n-1}, Px_{3n-2}).$$

इसी प्रकार

$$p(Px_{2n+1}, Px_{2n}) \leqslant hp(Px_{2n}, Px_{2n-1}).$$

इन दोनों संबंधों के आलोक में

$$p(Px_{n+1}, Px_n) \leqslant hp(Px_n, Px_{n-1})$$

इसलिए $\{Px_n\}$ एक कोशी अनुक्रम है और किसी बिंदु $z$ पर अभिसरित होता है। प्रतिचित्रणों $S$ और $T$ की संततता के कारण $SSx_{2n+1} \to Sz$ और $TTx_{2n} \to Tz$। चूँकि प्रतिचित्रण $P$ दोनों प्रतिचित्रणों $S$ और $T$ के साथ क्रमविनिमयी है। इसलिए

$$PSx_{2n+1}=SPx_{2n+1}+Sz$$

और

$$PTx_{2n}=TPx_{2n}\rightarrow Tz.$$

अस्तु (7.1) से

$$p(PSx_{2n+1};\ PTx_{2n})$$

$$\leqslant p \text{ अधिकतम } \{p(PSx_{3n}+_1, SSx_{2n+1}), p(PTx_{2n}, TTx_{2n}),$$

$$(\tfrac{1}{2})\ [p(PSx_{2n+1}, \mathrm{T}Tx_{3n})+p(PTx_{2n}, SSx_{2n+1})], p(SSx_{2n+1}, TT_{2n})\}.$$

इसमें $n$ को अनंत लेने पर

$$p(Sz,\ Tz)\leqslant hp(Sz,\ Tz),$$

अत: $p(Sz,\ Tz)=0$ । इसीलिए $G$ के प्रत्येक $V$ के लिए $(Sz,\ Tz)\in V$ और $Sz=Tz$.

इसी प्रकार (7.1) में $x=z$ और $y=Tx_{2n}$ रखने व $n$ को अनंत लेने पर तथा $Sz=Tz$ का प्रयोग करने पर हम $G$ के प्रत्येक $V$ के लिए $(Pz,\ Tz)\in V$ और $p(Pz,\ Tz)=0$

प्राप्त करते हैं। अत:

$$Sz=Tz=Pz$$

पुन: (7.1) में $x=x_{2n+1}$ और $y=z$ रखने व $n$ को अनंत लेने पर $G$ के प्रत्येक $V$ के लिए $p(z,pz)=0$ और $(z,Pz)\in V$ प्राप्त होता है। इससे $z=Pz$ सिद्ध होता है। इसलिए $z$ प्रतिचित्रणों $P$, $S$ और $T$ का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है। $z$ अद्वितीय है यह सिद्ध करना आसान है।

प्रमेय 8. माना कि अनुक्रमत: पूर्ण हाउसडोर्फ सम परिवेश समष्टि $X$ पर स्व-प्रतिचित्रण $P,S$ व $T$ इस प्रकार हैं कि

$P(X)\cup S(X)\subseteq T(X)$, $PT=TP$ और $ST=TS$ मान लें $V_i\in G(i=1,2,\ldots 5)$ व $x,y\in X$ तथा $a_3=a_4$ के लिए शर्तें (6.1) और (3.2) संतुष्ट होती हैं। यदि $T$ संतत है तब $P,S$ और $T$ अद्वितीय उभभनिष्ठ स्थिर बिंदु का अस्तित्त होता है।

उपपत्ति : माना कि $V\in G$ मनमाना है और $V$ का मिन्कोव्स्की छद्मदूरीक $p$ है। माना कि $x,y\in X$. प्रमेय 3 की उपपत्ति का अनुसरण करके

$$p(Px,\ Sy)$$

$$\leqslant h \text{ अधिकतम } \{p(Px,Tx), p(Sy,Ty), (\tfrac{1}{2})\ [p(Px,Ty)\ +p(Sy,Tx)], p(Tx,Ty)\}$$

सिद्ध किया जा सकता है। उपपत्ति का शेषांश निर्देश [15] का अनुसरण कर पूरा किया जा सकता है।

## 4. टिप्पणियाँ

4.1. यदि हम (3.1) में $S_n=T_n$ या (5.1) में $P_n=S_n$ लें और (4.1) में $S=T$ या (6.1) में $P=S$ लें तब क्रमशः शर्तें (1.1) और (2.1) प्राप्त की जा सकती हैं। प्रतिचित्रणों के अनुक्रम संबंधित अनेक परिणाम अभिसरण प्रमेयों 3-6 की विशेष स्थिति के रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं। उदाहरणार्थ $S_nx=T_nx(x\in X)$ के साथ इस प्रपत्र की प्रमेयों 3 व 4 से रोअड्स् [9, प्रमेय 2-3] के परिणाम। प्रमेय 5 और 6 से भी $P_n=S_n$ और $T_nx=x, x\in X$ लेकर विशेष स्थिति के रूप में उपर्युक्त परिणाम प्राप्त किये जा सकते हैं।

4.2. $Tx=x(x\in X)$ के साथ इस प्रपत्र की प्रमेय 8 की विशेष स्थिति के रूप में रोअड्स् [9] की प्रमेय 4 को प्राप्त किया जा सकता है।

4.3. यदि प्रमेय 7 में समष्टि $X$ को पूर्ण न मानें और $S(X)\cap T(X)$ को पूर्ण हाउसडोर्फ उपसमष्टि मान लें तो प्रतिचित्रणों $S$ व $T$ पर से सांतत्य प्रतिबंध हटाया जा सकता है। इसी प्रकार $X$ के स्थान पर यदि $T(X)$ को पूर्ण हाउसडोर्फ उपसमष्टि मान लें तो प्रमेय 8 से $T$ पर लगा सांतत्य प्रतिबंध हटाया जा सकता है।

## निर्देश

1. आचारी, जे०, Math. Rev. Anat. Number. Theor. Approximntion, Math. (1987), **29** (52) no, **2**, 95-98.

2. आचार्य, एस० पी०, Math. Vesnik 1976, **13** (28) 131-141.

3. बोंसल, एफ० एफ०, Lecture on some fixed point theorems of functional analysis, T, I. F. R., Bombay, 1962.

4. जुंगक, जी०, Amer. Math. Monthly 1976, **83**; 261-263.

5. केलर, जे० एल०, General Topology, Van Nostrand, Princeton, M. J., 1955.

6. मिश्रा, एन० एन०, Rend. Sem Mat. Univ. Politec. Torino 1975 76, **34**, 405-410.

7. नैडलर, एस० बी०, Pacific J Math. 1968, **27** (3), 571-585.

8. रोड्स, बी० ई०, Trans. Amer. Math. Soc. 1979, **226**, 157-290.

9. वही, Publ. Inst. Math. (Beograd) 1979, **25** (39), 153-156.

10. सिंह, एस० एल०, Arch. Math. (Brno) 1979, **15** (1), 35-38.

11. वही, Math. Edu. (Siwan) 1985, **19**, 146-148.

12. सिंह, एस० एल० तथा कुलश्रेष्ठ, सी० Math. Edu. (Siwan) 1981, **15** A, 55-60

13. सिंह, एस० एल० तथा मिश्रा, एस० एन०, Mathematik 1983, **6**, 202-206.

14. सिंह, एस० एल० तथा पन्त, बी० डी०, Honam Math. J. 1984, **6**, 1-12.

15. सिंह, एस० एल० तथा राम, बी०, J. Univ. Kuwait (Science) 1983, **10**, 31-35.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 3, 1994

# जुलाहा पक्षियों द्वारा कुओं में नीडारोपण

**सतीश कुमार शर्मा**
क्षेत्रीय वन अधिकारी, अरावली वृक्षारोपण परियोजना, झाडोल (फ०), उदयपुर (राज.)

[ प्राप्त—फरवरी 1 1994 ]

## सारांश

राजस्थान में जुलाहा पक्षियों की तीन जातियाँ ज्ञात हैं यथा प्लासियस फिलिपाइनस, प्लॉ० वेंघालेन्सिस, तथा प्लॉ० मनयार । इन तीनों जातियों में से प्ला० फिलिपाइनस ही ऐसी किस्म है जो कुओं में उगने वाली वनस्पति पर अपनी नीड कॉलोनी रखती है ।

## Abstract

**Nesting by weaver birds in wells.** *By* Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer, A. A. P., Jhadol (Ph), Distt. Udaipur, (Raj.).

Three species of weaver birds viz., **Ploceus Philippinus**, P. **benghalensis** and **P. Manyar** are confined to State of Rajasthan. Among all these three, **Ploceus Philippinus** is the only species, which patronizes vegetation, growing in the wells, for nesting.

कुओं व बावड़ियों जैसे आवासों में जुलाहे पक्षी, कबूतर एवं बैंक मैना जैसे पक्षियों द्वारा नीडारोपण किया जाता है । कबूतर दीवारों के छेदों या सिचाई हेतु लगाये गये उपकरणों से प्राप्त उपयुक्त स्थानों पर घोंसला रखता है । बैंक मैना प्राय: कच्चे कुओं की दीवारों में मिट्टी खोद कर सुरंग बना लेती है । जुलाहे पक्षी पुराने कुओं में दीवारों पर उगी लटकती हुई वनस्पतियों पर घोसले रखते हैं ।

भारत में जुलाहा पक्षियों की चार प्रजातियाँ **Ploceus Philippineus, P. benghalensis, P Manyar** तथा **P. Megarhynohus** ज्ञात हैं । इन में से सामान्य बया पक्षी (**P. Philppinus**) को ही कुओं में उगने वाली वनस्पतियों पर घोंसले लटकाते देखा गया है (अली[1] अली तथा अम्बेडकर[2] कुक[3-4] शर्मा[4] ) ।

प्रस्तुत पत्र में जुलाहा पक्षियों की तीन प्रजातियों यथा **Plooeus Philippinus, P. benghalensis** तथा **P. Manyar** के कुओं में नीडारोपण की प्रवृत्ति पर प्रकाश डालने का प्रयास किया गया है ।

**अध्ययन क्षेत्र एवं उसकी पारिस्थितिकी**

प्रस्तुत अध्ययन राजस्थान के 30 जिलों में 1980 से 1993 तक किया गया है

राजस्थान में 100 मिमी० से 800 मिमी० तक वर्षा होती है । राजस्थान को मुख्य रूप से तीन भू-जलवायु क्षेत्रों में बाँटा जा सकता है । पश्चिम में थार का रेगिस्तान तथा पूर्व में मैदानी क्षेत्र एवं दोनों के बीच में दीवार की तरह अरावली पर्वतमाला । रेगिस्तानी क्षेत्र में 100से 500 मिमी० वाले जिले हैं । राजस्थान में दक्षिणी जिलों में सर्वाधिक वर्षा होती है ।

राजस्थान में दो तरह के कुएँ मिलते हैं—गोलाकार, जिनकी दीवारें पत्थर से बनी हुई होती हैं, तथा चौकोर, जिनकी दीवारें प्रायः पत्थर से चुनी हुई नहीं होतीं । गोलाकार कुएं पश्चिमी एवं पूर्वी राजस्थान में मिलते हैं । प्रायः इन कुओं की चुनाई बिना चूना-मसाला के, सूखे पत्थरों से की जाती है जिससे पत्थरो के जोड़ों के बीच में विभिन्न वनस्पतियों को उगने का मौका मिल जाता है । कई बार इन कुओं में प्लास्टर कर दिया जाता है जिससे वनस्पति प्रायः नहीं उगती, परन्तु कई बार पलास्टर में दरार पड़ जाने से बरगद, पीपल, गूलर, अंजीर व अन्य वनस्पतियाँ उग आती हैं । गोलाकार कुओं से जहाँ-जहाँ सीमेन्ट कन्क्रीट के फर्मे काम में लिये जाते हैं, इनमें प्रायः वनस्पति उपयुक्त स्थान के अभाव में कम ही पनप पाती है ।

दक्षिणी राजस्थान में अरावली के फैलाव की वजह से भूमिगत भाग चट्टानी है जिससे कुओं की खुदाई के वर्षों बाद तक भी दीवारें स्थिर बनी रहती हैं । अतः दक्षिणी राजस्थान में कुओं की दीवारें प्रायः पत्थर से नहीं चुनी जाती हैं । दक्षिणी राजस्थान में कुएँ चौकोर एवं चौड़े खोदे जाते हैं । राजस्थान में बावडियाँ भी जगह-जगह मिलती हैं । प्रायः बावडियाँ पक्की, प्लास्तर की हुई मिलती हैं । अधिकांश बावडियाँ राजा-महाराजाओं के समय की बनी हैं । वे भी जुलाहा पक्षियों के लिये प्रिय आवास हैं ।

कुओं एवं बावडियों में जुलाहा पक्षी दो तरह के आधारों पर घोंसले रखते हैं :—

(अ) वनस्पतियों (Vegetation) पर, तथा

(ब) विभिन्न रचनाओं (Structures) पर ।

उगी हुई वनस्पति चार अवस्थाओं में मिल सकती हैं :—

(अ-1) कुओं के पास (बाहर) या मुँह पर उगी झाडियाँ एवं वृक्ष जो कुएँ में लटकते हुए नहीं मिलते, तथा सीधे ऊर्ध्व खड़े रहते हैं,

(अ-2) कुओं के पास या बाहर उगी वनस्पति जो कुएँ में लटकती रहती है,

(अ-3) कुओं के अन्दर दीवारों पर उगी झाडियाँ व वृक्ष जो ऊर्ध्व खड़े रहते हैं,
(अ-4) कुओं के अन्दर दीवारों पर उगी झाडियाँ व वृक्ष जो लटकते रहते हैं।

कुओं में सिचाई हेतु रहट आदि लगाये जाते हैं। इन रचनाओं के विभिन्न उभारों (Projeo-tions) पर भी नीडारोपण मिल सकता है।

**अध्ययन प्रक्रिया '**

कुओं में जुलाहा पक्षियों के नीडारोपण का अध्ययन करने के लिये व्यापक सर्वेक्षण किया गया। विशेषकर पुराने कुओं, बावडियों, खानों के गड्ढों (Mine pits) आदि का अवलोकन किया तथा इनकी दीवारों पर उगी वनस्पतियों पर या अन्य रचनाओं पर लगे घोंसलों का निरीक्षण किया गया। वनस्पतियों के प्रकार तथा घोसलों की संख्या दर्ज की गई।

## परिणाम तथ विवेचना

अध्ययन के दौरान कुल 1000 कुओं एवं बावडियों का अध्ययन किया जिसमें निम्न प्रकार का नीडारोपण पाया गया (सारणी 1) :—

**सारणी 1**

| प्रजाति | कुओं की संख्या जिनमें घोसले पाये गये: वनस्पतियों पर | रचनाओं पर | प्रतिशत |
|---|---|---|---|
| 1. **P. Philippinus** (Baya Weaver Bird) | 661 | 1 | 66.20 |
| 2. **P. benghalensis** (Blackthroated Weaver Bird) | — | — | — |
| 3. **P. Manyar** (Streaked Weaver Bird) | 1 | — | 1.00 |

अध्ययन से यह स्पष्ट हुआ है कि कुओं में नीडारोपण की प्रवृत्ति सामान्य बया पक्षी (Ploceus Philippinus) में ही पाई जाती है। अन्य जातियों के जुलाहा पक्षी कुओं में नीडारोपण करना नहीं पसंद नहीं करते। उपरोक्त तथ्य के अलावा सामान्य बया पक्षी के कुओं में नीडारोपण के के निम्न तथ्य भी उजागर हुए जिनका विवरण नीचे दिया गया है :—

1. राजस्थान में सामान्य बया पक्षी 4 प्रकार की वनस्पतियों पर घोसले लटकाता है (शर्मा[5]) जिनमें 18 प्रकार की वनस्पति ऐसी पाई गई जो प्राय: कुओं (या अन्य ऊर्ध्व दीवारों) पर उगी

होने पर ही घोंसले लटकाने के लिये पसंद की जाती हैं । कुओं के बाहर प्रायः इन पर नीडारोपण नहीं किया जाता है । ये प्रजातियां निम्न हैं —

| | | |
|---|---|---|
| (1) | Adhatoda zeylianica | अडूसा |
| (2) | Alangium Salvifolium | आकोल |
| (3) | Acacia Pennata | ऐला |
| (4) | Calotropis procera | आक |
| (5) | Cryptostegia grandiflora | दूद्धी |
| (6) | Clerodendrum inerme | अर्नी |
| (7) | Cyanodon dactylon | दूबघास |
| (8) | Ficus bengalensis | बरगद |
| (9) | F. carica | अंजीर |
| (10) | F. racemosa | गूलर |
| (11) | F. religiosa | पीपल |
| (12) | Grewia flavescens | कालीस्याली |
| (13) | Heteropogon coturtus | सूरजवाला घास |
| (14) | Jatropa curous | रतनजोत |
| (15) | Kirganelia reticulata | कम्बोई |
| (16) | Lantana indica | बेशर्म |
| (17) | Securinega leucopyrus | धेलिया |
| (18) | Withania somnifera | असगंध |

प्रस्तुत अध्ययन के दौरान विदानिया सोमनिफेरा (असगंध) नामक शाकीय पौधे पर अलवर जिले में तथा हेट्रोपोगान कटूरटस नामक घास में उदयपुर जिले में प्रथम बार घोंसले लटकते देखे गये । इस प्रकार समान्य बया के नीडारोपण हेतु चयनित वनस्पति प्रजातियों की संख्या 86 हो गई ।

2. प्रायः उन कुओं पर नीडारोपण अधिक मिलता है जो वर्षों से अप्रयुक्त पड़े हैं । हालांकि उपयुक्त वनस्पति आधार मिलने पर चालू कुओं में भी नीडारोपण किया जाता है । चूंकि वर्षा में चालू कुओं का भी सिंचाई में प्रयोग नहीं होता अतः कुएं व्यवधानरहित हो जाते हैं, अतः बया इनमें नीडारोपण कर लेती है ।

3. कुओं में लगे घोंसले विभिन्न शत्रुओं जैसे साँप, बंदर, आदमी आदि की पहुँच से अपेक्षाकृत ज्यादा सुरक्षित होते हैं। कुओं में लगी नीड कॉलोनियों में घरेलू कौवे एवं जंगली कौवे का आक्रमण भी नहीं देखा गया है जबकि कुओं के बाहर ये दोनों पक्षी प्रमुख आक्रमणकारी सावित होते हैं।

4 बया पक्षी पानी के ऊपर झुकी वनस्पतियों, शाखाओं पर नीडरोपण करना ज्यादा पसंद करता है। कुएँ में भरा पानी उसकी इस प्रवृत्ति का किस तरह पोषण करता है अभी तक ज्ञात नहीं है। यदि कुएँ में पानी नहीं हो तो भी बया वहाँ नीडारोपण करता है।

5. यदि कुएँ की दीवार पर नीचे तक वनस्पति विद्यमान हो तो नीडारोपण प्राय: ऊपर की वनस्पतियों पर ही किया जाता है। चूँकि ऊपरी हिस्से में प्रकाश की पर्याप्त आवक होती है अत: नरों के बनाये घोंसले एवं उनके प्रणय करतब निरीक्षण हेतु आने वाली मादाओं को आसानी से नजर आते रहते हैं (शर्मा[6])।

6. कुओं के बाहर मैदानों में खड़े वृक्षों पर बया पक्षी प्रय: छत्रक (Crown) के पूर्वी भाग में घोंसले रखता है ताकि दक्षिण-पश्चिम दशा में बरसात एवं हवा के प्रहार से ज्यादा दोलन गति न हो। चूँकि कुओं में दक्षिण-पश्चिम से आने वाली वर्षा एवं हवा के प्रहार का कोई भय नहीं होता अत: उपलब्ध वनस्पति के अनुसार घोंसले किसी भी दिशा की दीवार पर हो सकते हैं। कुओं के बाहर पास में खड़े वृक्षों पर घोंसले प्राय: वृक्ष छत्रक के उस भाग में लगाये जाते हैं जो कुएँ की तरफ मुखातिब होता है चाहे उसका दिशा विन्यास कुछ भी क्यों न हो।

7. प्राय घोंसले इस तरह लटकाये जाते हैं कि उनके अण्ड कक्ष नजदीकी दीवार की तरफ रहे तथा प्रवेश कक्ष कुएँ के केन्द्र की तरफ रहे। इस विन्यास से घोंसले में आने जाने की उड़ानों को दीवार के कम से कम अवरोध का सामना करना पड़ता है।

8. इस पत्र में दर्ज कुओं में नीडित 17 प्रजातियों के अलावा 68 प्रजातियों के पौध पर कुओं के बाहर मैदानों में नीडारोपण किया जाता है। परन्तु इनमें यदि कोई वनस्पति कुओं में उग आती है तो उसपर घोंसला लटका दिया जाता है (शर्मा[5])।

9. कुओं में नीडित वनस्पतियों में मोरेसी कुल पौधे जैसे बरगद, पीपल, गूलर तथा अंजीर अग्रणी हैं। क्योंकि इन पौधों के कुओं में मिलने की आवृत्ति ज्यादा है अत: ये सर्वाधिक संख्या में नीडन में प्रयुक्त किये जाते हैं।

10. उदयपुर जिले में आंडा-कांकरमाला गाँव के पास एक कुएँ में एक नीड कॉलोनी में दो पूर्ण घोंसले एक लकड़ी के बने रहट (Persian Wheel) के चक्के के दो अरों के छोर पर लटकते देखे गये। इस कुएँ में कोई वनस्पति नहीं थी। इससे आभास मिलता है कि बया कुओं में नीडारोपण की तीव्र प्रवृत्ति रखती है।

## कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डॉ० शिव शर्मा, डॉ० प्रभाकर जोशी एवं वन विभाग राजस्थान के श्री यू० एम० सहाय, श्री एस० के० श्रीवास्तव, श्री डी० एन० पाण्डे श्री ए० एस० चम्पावन, श्री राहुल भटनागर,

डॉ० एन० सी० जैन, डॉ० सूरज जिद्दी का आभारी है जिन्होंने इस अध्ययन में अनेक प्रकार से सहयोग किया। उन किसानों के प्रति भी मैं अपना आभार प्रकट करना चाहता हूँ जिन्होंने अपने कुओं पर मुझे पक्षियों की नीड कॉलोनियों का अवलोकन करने दिया एवं कार्य में मदद की।

## निर्देश


1. अली, एस०, J. Bombay Nat. Hist. Soc. 1931, 34, 947-64
2. अली, एस० तथा अम्बेदकर, यू० पी०, वही, 1957, 54 (3), 491-502
3. क्रूक, जे० एच०, वही, 1960, 57, 1-44
4. वही, वही, 1963, 60, 1-48
5. शर्मा, एस० के०, पी-एच डी० थीसिस, राजस्थान विश्वविद्यालय 1992

Vijanana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 3, 1994

# लीजेण्ड्र श्रेणी की चरम नार्लुण्ड संकलनीयता

सुशील शर्मा तथा साधना मिश्रा
गणित विभाग, शासकीय कालिदास बालिका महाविद्यालय, उज्जैन (म० प्र०)

[ प्राप्त—अप्रैल 22, 1994 ]

## सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हमने लीजेण्ड्र श्रेणी की चरम नार्लुण्ड संकलनीयता पर एक प्रमेय सिद्ध किया है। हमारा प्रमेय सिंह[9] द्वारा फूरियर श्रेणी के लिए स्थापित प्रमेय का परिवर्तित रूप है।

## Abstract

**On absolute Norlund summability of Legendre series.** *By* Sushil Sharma and Sadhna Mishra, Department of Mathematics, Government Kalidas Girls College, Ujjain (M. P.).

In this paper we prove a theorem on absolute Norlund summability of Legendre series. We improved the result established by Singh[9] for Fourier series.

**1. परिभाषा :** श्रेणी $\Sigma u_n$ आंशिक योगफलों $\{S_n\}$ के अनुक्रम के साथ नार्लुण्ड माध्यों $(N, p_n)$ के द्वारा $S$ तक संकलनीय है यदि

$$\lim t_n \to S, \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty$$

जहाँ

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}\, s_v$$

श्रेणी $u_n$ की परम संकलनीय नार्लुण्ड माध्य कहलाती है, यदि श्रेणी

$$\Sigma\, |t_n - t_{n-1}|$$

अभिसारी हो।

यदि $p_n=\frac{1}{n+1}$, तब $t_n$ हार्मोनिक माध्य में परिवर्तित हो जाता है।

2. माना $f(x)$ एक फलन है जिसका अन्तराल $[-1, 1]$ है। इस फलन के संगत लीजेण्ड्र श्रेणी माना कि

$$f(x)\sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n(x)\equiv \Sigma V_n(x) \tag{2.1}$$

है जहाँ

$$a_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(y)\, C_n(y)\, dy \tag{2.2}$$

जहाँ $C_n(x)$, $n$ वाँ लीजेण्ड्र बहुपद है।

फूरियर श्रेणी के लिए सिंह[9] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है।

**प्रमेय A :**

यदि $\phi(t)$ बद्ध विचरण वाला अन्तराल $(o, \pi)$ और $\{p_n\}$ ऋणेत्तर, अवर्धमान अनुक्रम है तब

$$\{p_n-p_{n-1}\} \tag{2.3}$$

अवर्धमान अनुक्रम है और

$$\sum_{v=0}^{n} \frac{P_v}{v+1} \leqslant AP_n \tag{2.4}$$

जहाँ $A$ एक परम अचर है तब $t=x$ पर फूरियर श्रेणी $|N, p_n|$ संकलनीय है।

लीजेण्ड्र श्रेणी पर शर्मा[8] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है।

**प्रमेय B :**

यदि $f(x)$ बद्ध विचरण वाले अन्तराल $[1, -1]$ पर एक फलन है तब श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\,p_n}{P_n}\; V_n(x) \tag{2.5}$$

आन्तरिक बिन्दु $x$ पर अन्तराल $(-1, 1)$ के लिए $|N, p_n|$ संकलनीय है। जहाँ अनुक्रम $\{p_n\}$ वास्तविक, ऋणेत्तर और अवर्धमान है तब अनुक्रम

$$\psi_n=\left\{\frac{(n+1)\,p_n}{P_n}\right\} \tag{2.6}$$

बद्ध विचरण है।

इस प्रपत्र में हमारा उद्देश्य लीजेण्ड्र श्रेणी की परम नार्लुण्ड संकलनीयता पर सिंह[9] के प्रमेय $A$ की परिकल्पना (2.3) का उपयोग नहीं करते हुए सिद्ध करना है कि

**प्रमेय :**

यदि $f(x)$ बद्ध विचरण वाला अन्तराल $[-1, 1]$ तथा $\{p_n\}$ एक वास्तविक, ऋणेत्तर और अवर्धमान अनुक्रम है जैसा कि

$$\sum_{v=0}^{n} \frac{P_v}{v+1} \leqslant AP_n,$$

जहाँ $A$ पूर्णतः अचर है तब श्रेणी (2.1) आन्तरिक विन्दु $x$ के अन्तराल $(-1, 1)$ पर $|N, p_n|$ संकलनीय होगी।

3. प्रमेय की उपपत्ति के लिए हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

**प्रमयिका[5] 1**

यदि $\{p_n\}$ ऋणेत्तर और अवर्धमान अनुक्रम है तब $0<t<2\pi$ के लिए और प्रत्येक $n$, $a$ और $b$ के लिए

$$\left| \sum_{k=a}^{b} p_k \, e^{i(n-k)t} \right| < AP_\tau$$

जहाँ $A$ पूर्णतः अचर है $\tau=[1/t]$ और $[x]$ एक समाकलन भाग $x$ को प्रदर्शित करता है।

**प्रमेयिका[3] 2**

यदि $\{p_n\}$ ऋणेत्तर और अवर्धमान अनुक्रम है इसलिए $0\leqslant m\leqslant v$, $(v\geqslant 1)$ के लिए

$$\sum_{n=v}^{\infty} \frac{p_{n-m}}{(n+1)\,P_n} = O\left(\frac{1}{v}\right)$$

**प्रमेयिका[9] 3**

यदि $\{p_n\}$ ऋणेत्तर और अवर्धमान है जैसा कि

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k}{k+1} \leqslant AP_n$$

तब

$$P_k \sum_{n=k+1}^{M} \frac{1}{nP_{n-1}} \leqslant A \text{ ज्यों-ज्यों } M\to\infty$$

**प्रमेयिका**[6] **4**

$$O\leqslant\theta\leqslant\pi \text{ के लिए}$$

$$|\ C_{n+1}(\cos\theta)-C_{n-1}(\cos\theta)\ |\leqslant m\sqrt{\left(\frac{\sin\theta}{n}\right)}$$

$m, n$ और $\theta$ के लिए स्वतन्त्र है ।

**प्रमेयिका**[4] **5**

$$\epsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\epsilon,\ \epsilon_1\leqslant\phi\leqslant\pi-\epsilon_1,\ O<\epsilon<\pi/2,\ O<\epsilon_1<\pi/2$$

के लिए

$$[C_{n-k+1}(\cos\phi)-C_{n-k-1}(\cos\phi)]\ C_{n-k}(\cos\phi)$$

$$=\frac{2}{\pi(n-k)}\sqrt{\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\right)}[\sin(n-k+\tfrac{1}{2})(\phi-\theta)+\cos(n-k+\tfrac{1}{2})(\theta+\phi)]+O(n-k)^{-2}$$

$$C_n(\cos\theta)=\sqrt{\left(\frac{2}{n\pi\sin\theta}\right)}\cos\{n+\tfrac{1}{2})\ \theta-\pi/4\}+O(n-3/2),\ \epsilon_1\leqslant\theta\leqslant\pi-\epsilon.$$

4. **प्रमेय की उपपत्ति** : हम लिखते हैं

$$t_n-t_{n-1}=\sum_{v=0}^{n-1}\left(\frac{P_v}{P_n}-\frac{P_{v-1}}{P_{n-1}}\right)V_{n-v}(x)$$

$$=\frac{1}{P_n\,P_{n-1}}\sum_{v=0}^{n-1}(P_n\,p_v-P_v\,p_n)\,(n-v+\tfrac{1}{2})\,C_{n-v}(x)$$

$$\times\int_{-1}^{1}f(y)\,C_{n-v}(y)\,dy.$$

$$=\frac{1}{2P_n\,P_{n-1}}\sum_{v=0}^{n-1}(P_n\,p_v-P_v\,p_n)\,C_{n-v}(x)$$

$$\times\int_{-1}^{1}f(y)\left\{\frac{d}{dy}\,C_{n-v+1}(y)-\frac{d}{dy}\,C_{n-v+1}(y)\right\}dy.$$

अब इस सम्बन्ध के विचार में

$$C_n(1)=1,\ C_n(-1)=(-1)^n$$

इस क्रम में प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हमें दर्शाना है कि

$$\sum_n \frac{1}{P_n P_{n-1}} \left| \int_{-1}^{1} \sum_{v=0}^{n-1} (P_n p_v - P_v p_n) \{C_{n-v+1}(y) - C_{n-v-1}(y)\} df(y) \right| < \infty. \tag{4.1}$$

$x = \cos\theta,\ y = \cos\phi$ रखने पर उपर्युक्त निरूपण होगा

$$\sum_n \frac{1}{P_n P_{n-1}} \left| \int_{-1}^{1} \sum_{v=0}^{n-1} (P_n p_v - P_v p_n) C_{n-v}(\cos\theta) \times \{C_{n-v+1}(\cos\phi) - C_{n-v-1}(\cos\phi)\} df(\cos\phi) \right|$$

$$= \sum_n \frac{1}{P_n P_{n-1}} \left| \int_0^{c/\sqrt{n}} + \int_{c/\sqrt{n}}^{\theta-(cp_n)/P^2_n} + \int_{\theta-(cp_n)/P^2_n}^{\theta+(cp_n)/P^2_n} + \int_{\theta+(cp_n)/P^2_n}^{\pi-c/\sqrt{n}} + \int_{\pi-c/\sqrt{n}}^{\pi} \right|$$

$\leqslant J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5$, माना

हम रखते हैं

$$J_1 \leqslant \sum_n \frac{1}{P_n P_{n-1}} \left| \int_0^{c/\sqrt{n}} \sum_{v=0}^{n-1} P_n p_v \frac{m\sqrt{\sin\phi}}{(n-v)} df(\cos\phi) \right|$$

$$\leqslant \sum_n \frac{1}{P_n P_{n-1}} \frac{m}{n^{1/4}} \sum_{v=0}^{n-1} \frac{P_n p_v}{(n-v)}$$

$= O(1)$. (शर्मा[8] के अनुसार) (4.2)

$$J_3 \leqslant \sum_{1}^{\tau} + \sum_{\tau+1}^{\infty} = J_{3\cdot1} + J_{3\cdot2}, \text{ माना जहाँ } \tau = \left[\frac{1}{\theta+\phi}\right]$$

$$J_{3\cdot1} \leqslant \sum_{1}^{\tau} \frac{\sqrt{(\sin\phi)}}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=0}^{n-1} \frac{P_n p_v}{(n-v)}$$

$$= \sqrt{(\sin\phi)} \sum_{1}^{\tau} \frac{m}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=0}^{n-1} \frac{P_n P_v}{(v+1)(n-v)}$$

चूँकि $O(P_v) = p_v(v+1)$

$$=\sqrt{(\sin\phi)}\ \sum_{1}^{\tau}\frac{P_n\,P_{n-1}}{P_n\,P_{n-1}}\ \sum_{v=0}^{n-1}\frac{1}{(v+1)\,(n-v)}$$

$$=O(1). \tag{4.3}$$

प्रमेयिका 5 का उपयोग करने पर

$$J_{3\cdot 2}=\sum_{\tau+1}^{\infty}\frac{1}{P_n\,P_{n-1}}\left|\int_{\theta-(cp_n)/P^2_n}^{\theta+(cp_n)/P^2_n}(P_n\,p_v-P_v\,p_n)\right.$$

$$\times\left[\frac{2}{\pi(n-v)}\sqrt{\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\right)}\,\{\sin(n-v+\tfrac{1}{2})\,(\phi-\theta)+\cos(n-v+\tfrac{1}{2})\,(\theta+\phi)\}\right.$$

$$\left.\left.+O(n-v)^{-2}\right]df(\cos\phi)\right|$$

$$\leqslant J_{3\cdot 2\cdot 1}=J_{3\cdot 2\cdot 2}+J_{3\cdot 2\cdot 3},$$

माना अब

$$J_{3\cdot 2\cdot 2}\leqslant J_{3\cdot 2\cdot 2\cdot 1}+J_{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2},$$

जहाँ

$$J_{3\cdot 2\cdot 2\cdot 1}=\sum_{\tau+1}^{\infty}\frac{1}{P_n\,P_{n-1}}\left|\int_{\theta-(cp_n)/P^2_n}^{\theta+(cp_n)/P^2_n}\sum_{v=0}^{[n/2]-1}\left(P_n-\frac{P_v\,p_n}{p_v}\right)p_v\right.$$

$$\left.\times\frac{2}{\pi(n-v)}\sqrt{\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\right)}\left\{\cos\,(n-v+\tfrac{1}{2})\ (\theta+\phi)\right\}df\,(\cos\phi)\right|$$

अबेल रूपान्तरण का उपयोग करने पर

$$J_{3\cdot 2\cdot 2\cdot 1}=O\ \left[\sum_{\tau+1}^{\infty}\frac{1}{P_n\,P_{n-1}}\left(P_n-\frac{P_{[n/2]}-1\ p_n}{P_{[n/2]}-1}\right)P_\tau\right]$$

$$+O\left[\ \sum_{\tau+1}^{\infty}\frac{1}{P_n\,P_{n-1}}P_\tau\ \sum_{v=0}^{[n/2]-2}\left|\triangle\{P_x-p_n\ P_v/p_v\}\right|\ \right]$$

$$=O\left[\ \mathrm{P}_\tau\sum_{n=\tau+1}^{\infty}\frac{1}{P_n\,P_{n-1}}\ \frac{P_n}{(n-[n/2]+1)}\right]$$

$$+O\left[\ P_\tau\sum_{n=\tau+1}^{\infty}\frac{1}{P_n\,P_{n-1}}\sum_{v=0}^{[n/2]-2}\frac{P_n}{(n-v)\,(n-v-1)}\right]$$

$$+O\left[P_\tau \sum_{n=\tau+1}^{\infty} \frac{1}{n P_{n-1}} \sum_{v=0}^{[n/2]-2} \frac{P_n}{(n-v)} \times \left(\frac{P_{v+1}}{p_{v+1}} - \frac{P_v}{p_v}\right)\right]$$

$$=O\left[P_\tau \sum_{n=\tau+1}^{\infty} \frac{1}{nP_{n-1}}\right] + O\left[P_\tau \sum_{n=\tau+1}^{\infty} \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=0}^{[n-1]-2} \frac{1}{(n-v)(n-v-1)}\right]$$

$$+O\left[P_\tau \sum_{n=\tau+1}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \frac{1}{(n-[n/2]+2)} \left(\frac{P_{[n/2]-1}}{p_{[n/2]-1}} - \frac{P_0}{p_0}\right)\right]$$

$$=O(1) + O\left[P_\tau \sum_{n=\tau+1}^{\infty} \frac{1}{nP_{n-1}}\right]$$

$$=O(1). \tag{4.4}$$

हम रखते हैं

$$\frac{1}{P_n P_{n-1}} (P_n p_v - P_v p_n) - \frac{1}{(n+1) P_{n-1}} \left\{P_v (\psi_v - \psi_n) + p_v (n-v)\right\}$$

जहाँ

$$\psi_n = \left\{\frac{(n+1) p_n}{P_n}\right\}$$

$$J_{3\cdot2\cdot2\cdot2} \leqslant \sum_{\tau+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) P_{n-1}} \left| \int_{\theta-(cp_n)/P^2_n}^{\theta+(cp_n)/P^2_n} \sum_{v=[n/2]}^{n-1} P_v(\psi_v - \psi_n) \right.$$

$$\left. \times \frac{2}{\pi^{(n-v)}} \sqrt{\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\right)} \cos(n-v+\tfrac{1}{2})(\theta+\phi)\, df(\cos\phi) \right|$$

$$+ \sum_{\tau+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) P_{n-1}} \left| \int_{\theta-(cp_n)/P^2_n}^{\theta+(cp_n)/P^2_n} \sum_{v=[n/2]}^{n-1} p_v (n-v) \right.$$

$$\left. \times \frac{2}{\pi(n-v)} \sqrt{\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\right)} \cos(n-v+\tfrac{1}{2})(\theta+\phi)\, df(\cos\phi) \right|$$

$$\leqslant J'_{3\cdot2\cdot2\cdot2} + J''_{3\cdot2\cdot2\cdot2}, \text{ माना}$$

शर्मा[8] के अनुसार तथा अबेल रूपान्तरण द्वारा

$$\sum_{v=[n/2]}^{n-1} P_v (\psi_v - \psi_n) \cos \frac{(n-v+\frac{1}{2})^t}{(n-v)} \text{ जहाँ } t = (\theta+\phi)$$

$$=(1/t)\sum_{v=[n/2]}^{n-2} P_{v+1}\,|\Delta\psi_v|\,\frac{1}{(n-v)}+O(1/t)\sum_{v=[n/2]}^{n-2} P_{v+1}\,|\psi_{v+1}-\psi_v|$$

$$\times\left|\Delta\left(\frac{1}{(n-v)}\right)\right|+O\left[\frac{P_{n-1}}{t}\,\frac{(\psi_{[n/2]}-\psi_n)}{(n-[n/2])}\right]$$

$$=O(1/t)\sum_{v=[n/2]}^{n-2} P_{v+1}\,|\Delta\phi_v|+O\left(\frac{P_{n-1}}{t}\right)\sum_{v=[n/2]}^{n-2}\left|\Delta\,\frac{1}{(n-v)}\right|$$

$$\times\sum_{m=v}^{n-2}|\Delta\psi_m|+O\left(\frac{P_{n-1}}{t}\right)\sum_{v=[n/2]}^{n-2}\frac{1}{(n-v)^2}\sum_{m=v}^{n-2}|\Delta\psi_m|$$

$$+O\left[\frac{P_{n-1}}{t(n+1)}(\psi_{[n/2]}-\psi_n)\right]$$

$$=O\left[\frac{P_{n-1}}{t}\sum_{v=[n/2]}^{n-2}|\Delta\psi_n|\right]+O\left[\frac{P_{n-1}}{t(n+1)}(\psi_{[n/2]}-\psi_n)\right]$$

इसी प्रकार

$$J'_{3\cdot3\cdot2\cdot3}=O(1/t)\left[\sum_{\tau+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}\sum_{v=[n/2]}^{n-2}|\Delta\psi_v|\right]$$

$$=O(\sin t/2)^{-1}\left[\sum_{\tau+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}\sum_{v=[n/2]}^{n-2}|\Delta\psi_v\right]$$

जहाँ
$$O\left(\frac{1}{t}\right)=O\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-1}=O(1).$$

तब

$$J'_{3\cdot2\cdot2\cdot2}=O\left[\sum_{\tau+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}\sum_{v=[n/2]}^{n-2}|\Delta\psi_v|\right]$$

$$=O(1).$$ (देखें नन्दकिशोर[7])

अबेल रूपान्तरण का उपयोग करने पर

$$J''_{3\cdot2\cdot2\cdot2}=O(1/t)=\sum_{\tau+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\,P_{n-1}}\left\{\sum_{v=[n/2]}^{n-2}(p_v-p_{v+1})\right\}$$

$$+O(1/t)\sum_{\tau+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\,P_{n-1}}$$

$$\leqslant O(1/t)\left[\sum_{\tau+1}^{\infty}\frac{p_{[n/2]}}{(n+1)P_{n-1}}\right]+O(1/t)\left[\sum_{\tau+1}^{\infty}\frac{p_{n-1}}{(n+1)P_{n-1}}\right]$$

$$=O(1). \text{ (देखें प्रमेयिका 2)} \tag{4.6}$$

इस प्रकार हम देखते हैं

$$J_{3\cdot2\cdot2}=O(1). \tag{4.7}$$

अब

$$J_{3\cdot2\cdot1}=\sum_{\tau+1}^{\infty}\frac{1}{P_nP_{n-1}}\left|\int_{\theta-(cp_n)/P^2_n}^{\theta+(cp_n)/P^2_n}\sum_{v=0}^{n-1}P_n p_v\,|\phi-\theta|\,|df(\cos\phi)|\right|$$

$$=\sum_{\tau+1}^{\infty}\frac{1}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=0}^{n-1}P_n p_v\left(\frac{Cp_n}{P^2_n}\right)$$

$$=O(1). \tag{4.8}$$

इसी प्रकार

$$J_{3\cdot2\cdot3}=O(1). \tag{4.9}$$

और अब

$$J_3=O(1). \tag{4.10}$$

और अब $J_2$ पर विचार करने पर

$$J_2=\sum_{1}^{\rho}+\sum_{\rho+1}^{\infty}\leqslant J_{2\cdot1}+J_{2\cdot2},\text{ माना}$$

जहाँ $\rho$ कोई धनात्मक पूर्णांक है।

अब

$$J_{2\cdot1}=O(1). \text{ (प्रकरण } J_{3\cdot1} \text{ के अनुसार)} \tag{4.11}$$

$J_{2\cdot3}$ की गणना के लिए हम $C_n(\cos\phi)$ को निम्नलिखित उपगामी व्यंजकका उपयोग करते हैं,

$$c/\sqrt{n}\leqslant\phi\leqslant\pi-c/\sqrt{n}$$

के लिए

$$C_n(\cos\phi)=\sqrt{\left(\frac{2}{4\pi\sin\phi}\right)}\cos\{(n+\tfrac{1}{2})\phi-\pi/4\}+(n\sin\phi)^{-1}.\,O(1),$$

और व्योहार[1] का अनुसरण करके

$$C_{n-v}(\cos\theta)\{C_{n-v+1}(\cos\phi)-C_{n-v-1}(\cos\phi)\}$$

$$=\frac{2}{\pi(n-v)}\sqrt{\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\right)}\{\cos(n-v+\tfrac{1}{2})(\theta+\phi)+\sin(n-v+\tfrac{1}{2})(\phi-\theta)\}$$

$$+O(n-v)^{-2}\sin^{-3/2}\phi.$$

अब

$$J_{2\cdot2}=\sum_{\rho+1}^{\infty}\frac{1}{P_n P_{n-1}}\left|\int_{c/\sqrt{n}}^{\theta-(cp_n)/P^2_n}\sum_{v=0}^{n-1}(p_u p_v-P_v p_u)\right.$$

$$\times\left[\frac{2}{\pi(n-v)}\sqrt{\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\right)}\{\cos(n-v+\tfrac{1}{2})(\theta+\phi)+\sin(n-v+\tfrac{1}{2})(\phi-\theta)\}\right.$$

$$\left.+O(n-v)^{-2}\sin^{-3/2}\phi\right]df(\cos\phi|$$

$$=\sum_{\rho+1}^{\infty}\frac{1}{P_n p_{n-1}}\left|\int_{c/\sqrt{n}}^{\theta-(cp_n)/P^2_n}\left\{\sum_{v=0}^{[n/2]-1}+\sum_{[n/2]}^{n-1}\right\}\cdots\right|$$

जैसा कि $m=[n/2]$

$$\leqslant J_{2\cdot2\cdot1}+J_{2\cdot2\cdot2},\ \text{माना}$$

अब

$$J_{2\cdot2\cdot1}\leqslant J_{2\cdot2\cdot1\cdot1}+J_{2\cdot2\cdot1\cdot2}+J_{2\cdot2\cdot1\cdot3},\ J_{3\cdot2\cdot2\cdot1}$$

की विधि के समान

$$J_{2\cdot2\cdot1\cdot1}=O(1). \tag{4.12}$$

अब

$J_{2\cdot2\cdot1\cdot2}$ के लिये हम $\rho=[1(\theta-\phi]$ रखकर $J_{3\cdot2,2\cdot1}$ की तरह हल करने पर

$$J_{2\cdot2\cdot1\cdot2}=O(1). \tag{4.13}$$

और

$$J_{2\cdot2\cdot1\cdot3}=O(1). \tag{4.14}$$

इसी प्रकार

$$J_{2\cdot2\cdot1}=O(1). \tag{4.15}$$

$J_{2\cdot2\cdot2}$ भी इसी प्रकार हल किया जा सकता है।

$J_4$ और $J_5$ भी क्रमशः $J_2$ व $J_1$ के समान हल किये जा सकते हैं।

इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई।

## कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय डॉ० प्रेम चन्द्र को इस प्रपत्र के विषय में सुझाव देने के लिए धन्यवाद देते हैं।

## निर्देश

1. ब्योहार, बी० के०, Ann. Pol. Math. 1969, **22**, 121-131.
2. दास, जी० तथा महापात्र, पी० सी०, Proc. Lond. Math. Soc. 1980, **41**(3), 217-253.
3. दास, जी०, Proc. Lond. Math. Soc. 1969, 7, 357-384.
4. सेनसन, जी०, Orthogonal Functions, Academic Press, न्यूयार्क 1959 पृष्ठ 208.
5. फेडन, एल० एम० सी०, Duke Math. J. 1942, 9, 168-207.
6. ओब्रेचकोफ, एन० Annuaire Univ. Sofie Faculte-Physico-Mathematique, 1936, **1**, 39-133.
7. नन्द किशोर, Indian J. Math, 1967, 9, 123-136.
8. सुशील शर्मा, Indian J. Pure and Appl. Math. 1980, **11**(5), 655-665.
9. सिंह, टी०, Ind. J. Math. 1964, **6**(2), 129-136.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 3, 1994

# स्लीव उत्तेजन के अन्तर्गत हैलोजनों में जोशी प्रभाव पर खंडशः किरणन का प्रभाव

**जगदीश प्रसाद**
रसायन विभाग, मेरठ कॉलिज, मेरठ

[ प्राप्त—जनवरी 8, 1994 ]

## सारांश

विभिन्न दूरियों पर स्लीव इलेक्ट्रोडयुक्त ट्रान्सफार्मर विसर्जन द्वारा उत्तेजित, हैलोजनों से भरी स्लीव-नलियों के साथ, अनुप्रयुक्त विभव V, गैस-दाब $P$ तथा विसर्जन नली के आन्तरिक व्यास D को स्थिर रखते हुए कुछ प्रयोग किये गये हैं। विसर्जननली से 25 सेमी दूरी पर रखे 200 वाट 220 वोल्ट के तापदीप्त बल्ब के द्वारा विसर्जन स्तम्भ के समान भागों को 2 मिमी की क्रमवीक्षित किरणपुंज के किरणन से ज्ञात हुआ है कि जोशी प्रभाव $\Delta i$ का मुख्यतः इलेक्ट्रोड के तल पर प्रेक्षण होता है। परिणामों से प्रकट होता है कि $\Delta i$ प्रभाव का स्रोत गैसीय प्रावस्था का भाग बहुत कम और मुख्यतः इलेक्ट्रोड-तल है। घटना के लिए जोशी सिद्धान्त के आधार पर प्रेक्षित परिणामों की व्याख्या करने का प्रयास किया गया है।

## Abstract

**Joshi effect in halogens under sleeve excitation as a function of sectional irradiation.** *By* Jagdish Prasad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

Some experiments using sleeve-tubes containing halogens and excited by transformer discharge with Sleeve electrodes at various distances, have been carried out at constant applied potential V, gas pressure P and internal diameter of the discharge tube D. Irradiation from a 200 watt 220 volt incandescent bulb at 25 cm from the discharge tube, of equal portions of the discharge column with a scanned beam of 2 mm, has shown that the Joshi effect $\Delta i$ is predominantly observed at the electrode surface. Results have shown that the contribution of the gaseous phase is

very little and that the seat of the effect $\Delta i$ is mainly the electrode layer. An attempt at explaining the observed results has been made in the light of Joshi theory for the phenomenon.

किसी नल में धारा $i$ का मापदण्ड है इकाई समय में इलेक्ट्रोड पर पहुँचने वाले आवेशित कणों की संख्या[1,2]। इस प्रकार $i$ में परिवर्तन होना प्रकट करता है कि आवेशित कणों की संख्या या उनके द्वारा वाहित आवेश या आयनीय गतिशीलता तथा क्षेत्र-तीव्रता या इन सभी कारकों में परिवर्तन हुआ है। विसर्जन नली के विभिन्न प्रदेशों में आयन तथा इलेक्ट्रॉन-सांद्रण भिन्न-भिन्न होता है ; अतः यह कहना तर्कसंगत है कि उपर्युक्त कारकों में से किसी में परिवर्तन द्वारा धारा में उत्पन्न परिवर्तन, प्रकाश से उद्भासित विसर्जन नली के विभिन्न भागों के लिए भिन्न-भिन्न होना चाहिए। अतः विभिन्न प्रदेशों में उत्पन्न परिवर्तनों के अध्ययन के लिए, विसर्जन नली के विभिन्न भागों पर स्थित प्रदेशों के समान आयतनों को क्रमशः एक के बाद दूसरा किरणित करना चाहिए—न कि बाह्य प्रकाशपुंज से समस्त विसर्जन क्षेत्र को एकसाथ उद्भासित करना।

पूर्व अन्वेषणों[3-6] से प्रकट होता है स्लीव-नलियों में निम्न दाबों पर भरी हैलोजनों के आंशिक किरणन से उत्पन्न दोनों $+\Delta i$ तथा $-\Delta i$ के अध्ययन से $\Delta i$ के सम्भावित स्थान के विषय में ज्ञान प्राप्त हो सकता है। अतः समान व्यास की स्लीव-नलियों में, विभिन्न अन्तर-इलेक्ट्रोड दूरियों के साथ, अधिक $\pm\Delta i$ की उत्पत्ति के लिए अनुकूल परिस्थितियो के अन्तर्गत, प्रस्तुत अध्ययन सम्पादित किया गया।

## प्रयोगात्मक

उपकरण का सामान्य समायोजन तथा विद्युत्-परिपथ पूर्व [7, 8] की भाँति प्रयुक्त किये गये हैं। पूर्व अन्वेषकों[3, 4] द्वारा प्रयुक्त स्लीव नलियों को ध्यान में रखते हुए, गैस/वाष्प दाब तथा किरणन की तीव्रता व आवृत्ति को स्थिर रखकर, और अन्तर-इलेक्ट्रोड दूरी को न्यूनतम 4.5 सेमी से अधिकतम 15 सेमी या अधिक तक परिवर्तित करना उपयुक्त समझा गया। अथच, ताँबे के बारीक तार के एक घेरे से बनी स्लीव को विसर्जन नली पर लपेटा गया।

1.5 मिमी मोटा, 1 सेमी बाह्य व्यास की 25 सेमी लम्बी, सोडाकाँच की बनी स्लीव-नलियों को प्रयुक्त किया गया। सर्वप्रथम इन्हें गर्म क्रोमिक अम्ल से तत्पश्चात् आसुत जल से भली-भाँति धोकर, 200°C पर वायु-भट्टी में सुखाकर टॉप्लर पम्प के साथ जोड़ दिया गया। निर्वात के दौरान नलियों को 400-500°C पर गर्म किया गया तथा उच्च वोल्टता के ट्रॉन्सफार्मर से 5-6 घंटे तक उच्च विभव अनुप्रयुक्त किया गया।[9] तत्पश्चात् उन्हें प्रयोगशाला ताप 20°C पर ठंडा करके $pCl_2=4$ मिमी Hg 20°C तथा 20°C पर ब्रामीन व आयोडीन के वाष्प दाब पर मुँहबन्द करके निर्वातन-तन्त्र से हटा लिया गया।

विसर्जन नली को क्षैतिज स्थिति में एक ऐसे प्रकाश-रुद्ध बक्से में कस दिया गया जिसमें 1-1.2 सेमी चौड़े तथा 25 सेमी लम्बे एक अशांकित रेखाछिद्र की व्यवस्था थी। यह ध्यान रखा गया

था कि स्लीव-नली रेखाछिद्र के पास बिल्कुल पीछे सटी रहें और बाहर एक दूसरे बक्स में लगे 200 वाट 220 वोल्ट के बल्ब के तन्तु की सीध में रहें ; बल्व के बक्स में एक सर्पी कपाट की व्यवस्था थी। रेखाछिद्र और प्रकाश-उद्गम के बीच की दूरी को 25 सेमी पर स्थिर रखा गया और किरणित भाग को उद्गम की एक-सीध में रखा गया। नली के एक सिरे से दूसरे सिरे तक एक वार में नली का लगभग 2 मिमी भाग किरणित किया गया।

प्रत्येक स्लीव-नली के स्लीव अंतराल=5, 11, 13, 17 सेमी के साथ $\pm\Delta i$ प्रेक्षणों का अभिलेखन किया गया।

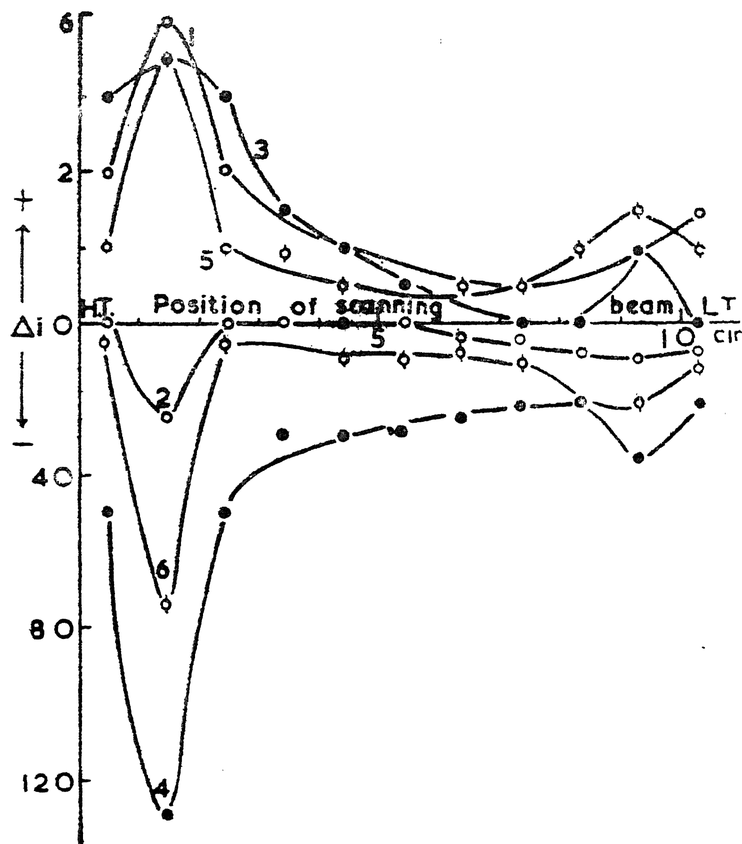
## परिणाम तथा विवेचना

प्राप्त परिणामों से स्पष्ट है कि $+\Delta i$ तथा $-\Delta i$ के अधिकतम परिमाण इलेक्ट्रोडों पर या इनके अत्यन्त समीप में प्राप्त हुए जबकि स्लीव-अन्तराल 11, 13 तथा 17 सेमी थे। जब स्लीव-अंतराल केवल 5 सेमी था, जैसा कि आगाशे के प्रयोग[3] में था, इलेक्ट्रोडों पर 'प्रभाव' अधिकतम नहीं था। निम्न विभवों पर, अधिकतम प्रभाव का प्रेक्षण तब हुआ जब नली के मध्य स्तम्भ को किरणित किया गया ; उच्च विभव के इलेक्ट्रोड पर प्रभाव अधिकतम से तनिक कम तथा निम्न विभव के इलेक्ट्रोड पर प्रभाव न्यूनतम था। स्लीव-अन्तराल 11, 13 तथा 17 सेमी के साथ प्रत्येक इलेक्ट्रोड के दोनों ओर के क्षेत्र में प्रभाव में तीव्र गिरावट का प्रेक्षण हुआ ; और 5 सेमी के स्लीव-अन्तराल के साथ, यह गिरावट इलेक्ट्रोड पर या इसके समीप में थी। स्लीव-अन्तराल 11, 13, 17 सेमी के साथ, मध्य भाग में न्यूनतम प्रभाव का प्रेक्षण हुआ, जो इलेक्ट्रोडों पर प्रेक्षित उच्च मानों की तुलना में नगण्य था, और 5 सेमी स्लीव-अन्तराल के साथ, मध्य भाग में अधिकतम प्रभाव का प्रेक्षण केवल तब हुआ जब अनुप्रयुक्त विभव निम्न था। तो भी, उच्च अनुप्रयुक्त विभवों पर प्राप्त परिणाम यह सिद्ध करने में पर्याप्त समर्थ हैं कि अधिकतम प्रभाव इलेक्ट्रोडों या इनके समीप में होता है। अधिकांशतः, सिरों के पास के क्षेत्र में प्राप्त मानों की तुलना में, मध्य भाग में प्राप्त न्यूनतम मान उपेक्षणीय थे। इलेक्ट्रोडों के क्षेत्र में प्रेक्षित अधिकतम मान समान नहीं थे। निम्न वोल्टता के इलेक्ट्रोड की तुलना में, उच्च वोल्टता के इलेक्ट्रोड को किरणित करने से प्राप्त प्रभाव अधिक था। ऐसा प्रतीत हुआ है कि इलेक्ट्रोड या उसके अत्यन्त समीप में प्रेक्षित अधिकतम प्रभाव भित्ति-आवेशों पर निर्भर है।

प्राप्त परिणामों से प्रकट है कि दोनों $+\Delta i$ तथा $-\Delta i$ मुख्यतः इलेक्ट्रोडों के परिक्षेत्रों से सम्बन्धित होने चाहिए। इलेक्ट्रोड की धरातल पर कुछ परतों के निक्षेपण से उत्तेजित तल में हुए परिवर्तन के कारण $\Delta i$ के दोनों परिमाण तथा चिह्न पर प्रभाव से निष्कर्ष निकलता है कि विसर्जन के दौरान नली के इलेक्ट्रोड़ का धरातल निष्क्रिय नहीं रहता है बल्कि उसका $\Delta i$ की उत्पत्ति में महत्वपूर्ण योगदान रहता है[10, 11] प्रस्तुत अध्ययन से स्पष्ट है कि समांग गैस-प्रावस्था की अपेक्षा, इलेक्ट्रोड तल का बहुत महत्व है। प्रेक्षित परिणाम $\Delta i$ की तल पर निर्भरता की ओर इंगित करते हैं, जिनकी व्याख्या $\Delta i$ के लिए जोशी के सिद्धान्त[11, 13] पर संभव है।

जहां तक उपर्युक्त उच्च वोल्टता के इलेक्ट्रोड के साथ प्राप्त प्रेक्षणों का सम्बन्ध है, भूसंपर्कित

निम्न वोल्टता के इलेक्ट्रोड से, उच्च वोल्टता के ट्रान्सफार्मर से जुड़ी इलेक्ट्रोड की भित्ति पर विद्यमान आवेश निश्चित रूप से भिन्न होते हैं—यह मानना बुद्धिसंगत है। यह दोनों इलेक्ट्रोडों पर प्रेक्षित प्रभावों के अन्तर की व्याख्या करने में सक्षम है। ऐसा प्रतीत होता है कि विसर्जन-नली के मध्य भाग को किरणित करने से प्राप्त अत्यन्त न्यून परिमाण का $\Delta i$, विसर्जन-नली की किरणित काँच की दीवार से अवांछित प्रकीर्ण प्रकाश के इलेक्ट्रोड के परिक्षेत्र में पहुँचने के कारण है। अथच, विसर्जन स्तम्भ को किरणित करने से प्राप्त अत्यन्त न्यून $\Delta i$ की व्याख्या इस प्रकार संभव है कि वह विसर्जन-स्तम्भ की देन नहीं है—इसके आयतन-प्रभाव होने की तो लेशमात्र भी संभावना नहीं है।




चित्र 1—स्लीव उत्तेजन के अन्तर्गत 11 सेमी स्लीव-अन्तराल के साथ विसर्जन स्तम्भ के खंडशः किरणन का नेट जोशी प्रभाव $\Delta i$ पर प्रभाव (वक्र 1, 2 : क्लोरीन के साथ, 3, 4 : ब्रोमीन के साथ ; 5, 6 : आयोडीन के साथ ; 1 : 4.5 kV पर ; 2 : 5.56 kV पर ; 3 : 2.10 kV पर ; 4 : 3.40 kV पर ; 5 : 0.80 kV पर ; 6 : 2.10 kV पर)।

5 सेमी अन्तराल के साथ प्राप्त और अद्भुत प्रतीत होनेवाले प्रेक्षण की व्याख्या इस प्रकार संभव है : जब विसर्जन-स्तम्भ की लम्बाई 5 सेमी के समान बहुत कम है, उस समय विसर्जन-नली की काँच की दीवारों से प्रत्येक इलेक्ट्रोड पर पहुँचने वाले विसरित तथा प्रकीर्ण प्रकाश की मात्रा बहुत अधिक होती है, इसकी तुलना में कि जब स्लीवों के बीच की दूरी इससे कई गुना अधिक होती है। यह संभावना विसर्जन-धारा के प्रकाश-प्रभाव के लिए कुछ सीमा तक उत्तरदायी है। तथापि निम्न दाब पर गैस/वाष्प द्वारा प्रकीर्ण प्रकाश मापने योग्य प्रभाव उत्पन्न करने के लिए अत्यन्त कम है।

कुछ अवस्थाओं में इलेक्ट्रोड पर अधिकतम प्रभाव का प्रेक्षण न होकर इलेक्ट्रोड के अत्यन्त समीप में जो प्रेक्षण हुआ है, इसका कारण यह है कि प्रभाव प्रयुक्त स्लीव इलेक्ट्रोड पर निर्भर होता है। यदि ताँबे के चमकदार व बारीक तार के कई लपेटों को स्लीव के रूप में प्रयुक्त किया जाय और जब केवल 2 मिमी भाग को ही किरणित किया जाय, तब, यदि ताँबे के तार पालिश करके चमकाये गये हों तो, इलेक्ट्रोड पर पड़ने वाला प्रकाश परावर्तित होकर वापिस हो जायेगा, या यदि तार द्युतिहीन हैं, इलेक्ट्रोड के सामने की काँच की दीवार की धरातल के आस-पास को, जो $\Delta i$ का मुख्य स्रोत है, किरणित करने की दूर तक भी सम्भावना नहीं है। विसर्जन-नली के भागों पर अभिलम्ब रूप में आपाती प्रकाशपुंज को, स्लीव-इलेक्ट्रोड के रूप में कार्य करने वाले ताँबे के तार के लपेटों द्वारा पूर्णतः ढक लिया जाता है, इससे इलेक्ट्रोड का आन्तरिक धरातल जो सीमान्त तल का कार्य करता है और जो $\Delta i$ प्रभाव के लिए मुख्य रूप से उत्तरदायी[12] है, उस तक प्रकाश का मार्ग अवरुद्ध हो जाता है। तथापि, जब अगले 2 मिमी भाग को किरणित किया जाता है तब प्रकीर्ण प्रकाश इलेक्ट्रोड के सामने की काँच के अन्दर के धरातल पर पड़ता है, जिससे विसर्जन धारा का प्रकाश-परिवर्तन है, अतः इलेक्ट्रोड पर अधिकतम $\Delta i$ का प्रेक्षण न होकर, इलेक्ट्रोड के समीप के प्रदेश में होता है। इससे इलेक्ट्रोड के समीप अधिकतम प्रभाव के प्रेक्षण की व्याख्या सम्भव है; किन्तु जैसा कि प्रस्तुत अध्ययन में है, यदि प्रयुक्त ताँबे का बारीक तार 0.5 मिमी से अधिक मोटा नहीं हो और उसका केवल एक लपेट ही प्रयुक्त किया जाय है और क्रमवीक्षित प्रकाशपुंज 2 मिमी का हो तब प्रभाव इलेक्ट्रोडों पर प्रेक्षित होता है और इससे इलेक्ट्रोडों के समीप अधिकतम $\Delta i$ के प्रेक्षण की सम्भावना समाप्त हो जाती है। अपितु, प्रत्येक इलेक्ट्रोड के सामने के काँच के अन्दर के धरातल के आस-पास का स्थान ही $\Delta i$ प्रभाव का स्रोत है, प्रस्तुत अध्ययन से इसकी स्थापना होती है।

लेखक की पूर्व कल्पना [14] के अनुसार $V \gg V_m$ पर, वान्डर वाल्स परत के विशोषण के कारण $V_m - V_i$ परास में, $\Delta i$ की उत्पत्ति, इलेक्ट्रोडों पर रासायनिक शोषण के कारण $V_m - V_i$ परास में $V$ की वृद्धि से $+\Delta i$ में ह्रास (जबकि $V_i$ उत्क्रमण-विभव है), रासायनिक शोषित परत के विशोषण के कारण $V_i$ से आगे के $V$ पर $-\Delta i$ में वृद्धि की व्याख्या, प्रयुक्त क्षेत्र द्वारा इलेक्ट्रोडों की दीवारों को प्रदत्त सक्रियण ऊर्जा (विद्युतीय) के आधार पर सम्भव है; ये क्रियाएँ, अर्थात् अधिशोषित परत की निर्मिति तथा उसका विशोषण, इलेक्ट्रोड की दीवारों के प्रदेश में स्पष्टतः अधिक होंगी। तथापि आगाशे[3] का यह विचार कि विसर्जन का धनात्मक स्तम्भ $\Delta i$ की उत्पत्ति के लिए उत्तरदायी है, प्रस्तुत अध्ययन से पुष्ट नहीं हुआ है।

**कृतज्ञता-ज्ञापन**

डॉ० एम० वेनुगोपालन के अमूल्य सुझावों के लिये लेखक आभारी हैं।

## निर्देश

1. दीक्षित, के० आर०, जर्न० किमि० फिज०, 1948, **16**, 742.
2. थॉमसन, जे० जे० तथा थॉमसन, जी० पी०, "कन्डक्शन ऑफ इलेक्ट्रिसिटी थ्रू गैसिज" कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, लन्दन, भाग 2, 1931, 363.
3. आगाशे, वी० वी०, जर्न० किमि० फिजि, 1951, **19**, 1002.
4. खस्तगिर, एस० आर०, वही, 1952, **20**, 1052.
5. सेट्टी, पी० ऐस० वी०, (कु०) कुलकर्णी, के० तथा श्रीवास्तव, सी०एम०, इण्डियन जर्न० फिजि० 1952, **26**, 455.
6. हैरीज, डब्लु० एल० तथा फॉन एन्जिल, ए०, जर्न० किमि० फिजि०, 1951, **19**, **514**.
7. प्रसाद, जे०, रिव० रूमेन किमि० 1973, **18**, 1075.
8. प्रसाद० जे०, ऐक्टा सिएन्सिया इण्डिका, 1974, **1** 13.
9. लांग्म्यूर, आई०, जर्न० अमेर० केमि० सोसा०, 1916, **38**, 2221.
10. जोशी, एस० एस० एवं नरसिंहन, ए० पी०, करेण्ट साइंस, 1940, **9**, 536.
11. जोशी, एस० एस०, वही, 1947, 16, 19.
12. जोशी, एस० एस०, प्रोसि० इन्डियन साइंस कांग्रे०, प्रेजि० ऐड्र०, केमि० सेक०, 1943, 51.
13. जोशी, एस० एस०, वही, भाग 3, फिजि० सेक०, 1946, ऐब्स्ट 26 ; 1947, ऐब्स्ट 25.
14. प्रसाद, जे०, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, 1973, **16**, 131.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 3, 1994

# मध्यावधि चुनाव 1991 की सम्भावनाएँ एवम् उनके गणितीय विश्लेषण में संशोधन

**कन्हैया शंकर उपाध्याय**
गणित विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद
**सुभाष चन्द्र**
कम्प्यूटर सेन्टर, मोतीलाल नेहरू रीजनल इन्जीनियरिंग कॉलेज, इलाहाबाद
तथा
**वीरेन्द्र**
गणित विभाग, ग्रामोदय विश्वविद्यालय चित्रकूट धाम, सतना (म० प्र०)

[ प्राप्त—अप्रैल 4, 1994 ]

## सारांश

मूल शोध-पत्र अपने क्षेत्र में प्रथम गणितीय प्रयास है, जिसमें चुनाव-काल में मतों के क्रमिक उतार-चढ़ाव पर ही विचार किया गया है। अचानक उछाल पर नहीं। यही शोध-पत्र की मूल भावना है। "भारतीय जनता पार्टी" एवम् "भारतीय राष्ट्रीय कांग्रेस" के मतों के दर परिवर्तन को किसी विशेष अन्तराल में ($\alpha \leqslant \tau \leqslant 5$) चर-घातांकी पद द्वारा व्यक्त किया गया है, जो इस शोध-पत्र की सीमा में तो बहुत ज्यादा उतार-चढ़ाव नहीं देता मगर अन्य शर्तों में उतार-चढ़ाव $\pm 5\%$ से ज्यादा या कम हो सकता है, जो शोध-पत्र की मूल-भावना के विपरीत होगा। इस चर-घातांकी पद के लिए शोध-कर्ता ने "भाजपा०" के फासीवादी चरित्र को प्रकाश में आने एवम् उसके प्रति जनमानस में तीव्र-प्रतिक्रिया को उत्तरदायी माना है। यह सहज एवम् स्वाभाविक है। इसकी सम्भावना भी प्रबल है, किन्तु जनमानस की प्रतिक्रिया को प्रदर्शित करने के लिए दो, चार दिन या एक सप्ताह की अवधि पर्याप्त नहीं होती और कुछ सन्दर्भों में यदि यह सम्भव ही हो तो शोध-पत्र की मूलभावना के विपरीत बात होगी, जिसमें सतत् उतार-चढ़ाव को ही लिया गया है, अचानक उतार या चढ़ाव को नही। उक्त अवधि में "भारतीय जनता पार्टी" एवम् "भारतीय राष्ट्रीय कांग्रेस," के मत प्रतिशत दर को चर-घातांकी के स्थान पर अचत द्वारा प्रदर्शित करें तो सैद्धान्तिक रूप से शोधपत्र ज्यादा पुष्ट होगा। चुनाव परिणामों को देखते हुए इस प्रयास की व्यवहारिक पुष्टता भी स्पष्ट दृष्टिगोचर होती है।

चूंकि "चरघातांकी पद" "भारतीय जनता पार्टी" एवम् "भारतीय राष्ट्रीय काँग्रेस" के समीकरणों में प्रयोग किया गया है "जनता दल एवम् जनता दल (स)" का समीकरण अपरिवर्तनीय रहेगा, परिवर्तन केवल "भारतीय जनता पार्टी" एवम् "भारतीय राष्ट्रीय काँग्रेस" में सम्बन्धित समीकरण (1, समीकरण संख्या 3·1 एवम् 5·1) में होगा जो परिवर्तित हो कर अब निम्नवत् होंगे।

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau}=k_1, \qquad o\leqslant\tau\leqslant a \tag{1.1}$$

तथा

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau}=k_1-k_2, \qquad a\leqslant\tau\leqslant 5 \tag{1.2}$$

"भाजपा" के लिए तथा

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau}=k_1-k_2, \qquad o\leqslant\tau\leqslant a \tag{2.1}$$

तथा

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau}=k_1-k_2+k_2', \qquad a\leqslant\tau\leqslant 5 \tag{2.2}$$

भारतीय राष्ट्रीय काँग्रेस के लिए जहाँ अचर $k_1, k_2, k_2'$ तथा $a$ का मान शोधपत्र में दिए गए हैं।

चरघातांकी पद द्वारा व्यक्त परिवर्तन अचर (शून्य) मान लिया गया है, क्योंकि यह अन्तराल ($a\leqslant\tau\leqslant 5$) जो चार दिन से कम का ही अन्तराल है। चुनाव अवधि में तीव्र प्रतिक्रिया देने में सक्षम नहीं है, तथा तीव्र प्रतिक्रिया भी पत्र की मूलभावना के अनुकूल नहीं है। इस अवधि में मतदाता स्तब्ध सा मूक दर्शक बना रह जाएगा जो शून्य अचर परिवर्तन दर से ज्यादा उपयुक्त रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

अतः समीकरण (1·1) (1·2) एवम् (2.1) (2·2) को समाकलित करने पर

$$\bar{x}=1+k_1\tau, \qquad o\leqslant\tau\leqslant a \tag{1.3}$$

तथा

$$\bar{x}=1+k_2a+(k_1-k_2)\tau, \qquad a\leqslant\tau\leqslant 5 \tag{1.4}$$

"भाजपा" के लिए तथा

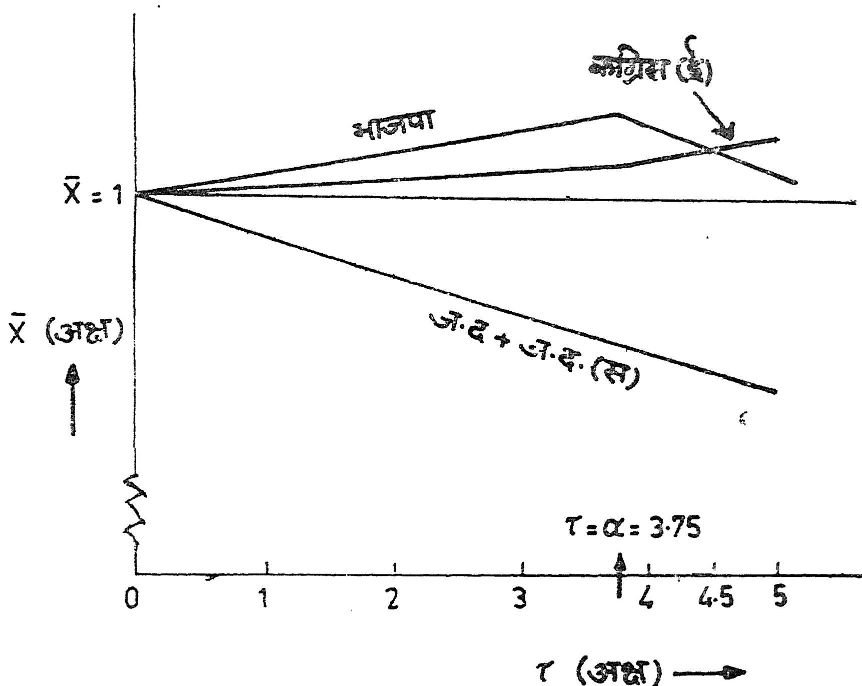
$$\bar{x}=1+(k_1-k_2)\tau, \qquad o\leqslant\tau\leqslant a \tag{2.3}$$

तथा

$$\bar{x}=1+(k_1-k_2)\tau+k_2'(\tau-\alpha), \quad (2.4)$$

$$\alpha \leqslant \tau \leqslant 5$$

भारतीय राष्ट्रीय काँग्रेस के लिए।




"भाजपा" के लिए

समीकरण संख्या (1.3) व (1.4) से यह स्पष्ट होता है कि आरम्भ में ($\tau=\alpha=3.75$) इसके मत सीधी रेखा में ऊपर चढ़ते हैं। उसके बाद मतों में स्थिरता आ जाती है, जो अक्ष के समानान्तर रेखा द्वारा प्रदर्शित है, अर्थात् जो भी मत का बढ़ता है वह $\tau \leqslant \alpha$ तक ही है। चुनाव के अन्तिम चरण में मत स्थिर हो जाता है।

"भारतीय राष्ट्रीय कांग्रेस"

समीकरण संख्या (2.3) (2.4) से यह स्पष्ट है कि आरम्भ से इसकी गति ऊपर चढ़ने की है। यद्यपि आरम्भ में यह गति बहुत धीमी है, परन्तु $\tau=3.75$ पर यह अपेक्षाकृत कुछ तेजी से बढ़ने लगता है और अन्त तक उसी गति को बरकरार रखता है।

**निष्कर्ष**

ग्राफ का निष्कर्ष निम्न चार्ट से स्पष्ट है[2] :—

| क्र० सं० | दल | चुनाव आरम्भ में मत प्रतिशत | मतों में कमी/वृद्धि प्रतिशत में | 1991 में प्राप्त होने वाले संभावित मत प्रतिशत | 1991 में प्राप्त होने वाले मत मत प्रति-शत |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | भा० ज० पा० | 20.00 | +0.84 | 20.84 | 19.9 |
| 2. | भारतीय राष्ट्रीय कॉंग्रेस | 36.00 | +3.4 | 39.4 | 37.3 |

चार्ट से स्पष्ट है कि भाजपा को 20.84% मत मिलना चाहिए, जबकि वास्तव में उसे 19.9% मत मिले (कुछ पत्र-पत्रिकाएँ इसे 20 से 21 प्रतिशत के बीच बतलाती हैं) अर्थात् अन्तर-0.94% जो मूल शोधपत्र की तुलना में +1.56 बेहतर परिणाम है। ऋणात्मक मत यह इंगित करते हैं कि जनता चुनाव के अन्तिम चरण में मात्र मूक दर्शक ही नहीं बनी रही, बल्कि उसने भाजपा के फ्रांसीवाद के प्रति कुछ प्रतिक्रिया भी व्यक्त की।

भारतीय राष्ट्रीय कॉंग्रेस के मत प्रतिशत के विषय में भी तालिका कुछ स्पष्ट संकेत देती है। इस संशोधन से मत प्रतिशत में अन्तर—2.1% है जबकि मूल शोधपत्र में यही अन्तर—3.2% का है। मत प्रतिशत में ऋणात्मक निदान यह स्पष्ट करता है कि जनता का कॉंग्रेस के प्रति झुकाव शोधपत्र की तुलना में कम रहा अथवा दल का नेतृत्व इसे बटोरने में सक्षम नहीं हो सका।

**निर्देश**

1. "विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका" 1992, 35, No-3 213-222 में प्रकाशित एवम् दिनाँक 30.4.91 को चुनाव परिणाम के पूर्व प्रकाशन हेतु प्रस्तुत कर दिया गया था।
2. "इण्डिया टुडे" 15 जुलाई, 1991, पृष्ठ संख्या 40-41.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 3, 1994

# H-फलन के लिए एक व्यापक अवकलन सूत्र

कोमल सूरी तथा अर्जुन के० राठी
गणित विभाग, डूंगर स्वायत्तशासी महाविद्यालय, बीकानेर (राज०)

[ प्राप्त—जनवरी 1, 1994 ]

## सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य $\bar{H}$-फलन के लिए एक व्यापक अवकलन सूत्र स्थापित करना है। चूँकि $\bar{H}$-फलन बहुत ही व्यापक फलन है अतः प्राचलों के विशिष्टीकरण से हमें देवड़ा तथा राठी, सामर, नायर, गुप्ता तथा जैन के परिणाम प्राप्त होते हैं।

## Abstract

**A general differentiation formula for the $\bar{H}$-function.** *By* Komal Suri and Arjun K. Rathie, Department of Mathematics, Dungar Autonomous College, Bikaner (Raj.).

The object of this paper is to evaluate a general differentiation formula for the $\bar{H}$-function. Since $\bar{H}$-function is the most general function of one variable studied so far, so on specialising the parameters, several known results due to Devra and Rathie, Rathie, Samar, Gupta and Jain, Nair have been obtained as special cases.

## 1. प्रस्तावना

माना [8]

$$s_i\,(f(x))=x^{r_i-t_i+1}\,\frac{d}{dx}x^{t_i}\,.\,f(x) \tag{1.1}$$

$$s_i\,(x^a)=(t_i+a)\;x^{r_i+a}$$

जहाँ $t_i$ तथा $r_i$ वास्तविक संख्याएँ हैं।

बहुचर्चित फाक्स[4] एवं ब्राक्समा[1] के $H$-फलन का सार्वीकरण हाल ही में इनायत हुसैन[6] ने $\bar{H}$-फलन द्वारा किया जिसे निम्न रूप में परिभाषित एवं अंकित किया जायेगा।[7]

$$\bar{H}_{p\ q}^{m\ n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} 1(\alpha_j, A_j; a_j)_n, & n+1(\alpha_j, A_j)_p \\ 1(\beta_j, B_j)_m, & m+1(\beta_j, B_j; b_j)_q \end{matrix}\right]$$

$$=(2\pi i)^{-1} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(\beta_j - B_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma^{a_j}(1-\alpha_j + A_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma^{b_j}(1-\beta_j + B_j s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(\alpha_j - A_j s)} z^s \, ds \tag{1.2}$$

जहाँ $\alpha_j(j=1, \ldots, p)$ तथा $\beta_j(j=1, \ldots, q)$ सम्मिश्र संख्याएँ हैं तथा $A_j>0\ (j=1, \ldots, p)$ तथा $\beta_j>0\ (j=1, \ldots, q)$ एवम् $a_j(j=1, \ldots, n)$ तथा $b_j(j=m+1, \ldots, q)$ अपरिमेय मान ग्रहण करते हैं। पुन: $L$ मेलिन-बार्नीज प्रकार का एक उपयुक्त कंटूर है और प्राचल इस प्रकार संकुचित रहते हैं कि $\bar{H}$-फलन सार्थक होता है।

इस फलन के लिए हाल ही में बुशमान तथा श्रीवास्तव[1] ने दर्शाया कि (1.2) के दाहिने पक्ष का समाकल पूर्णतया अभिसारी होता है जबकि $\theta>0$ तथा $|\arg z|<\frac{\theta\pi}{2}$, जहाँ

$$\theta=\sum_{j=1}^{n} |\beta_j|+\sum_{j=1}^{n} |a_j A_j|-\sum_{j=m+1}^{q} |b_j B_j|-\sum_{j=n+1}^{p} |A_j| \tag{1.3}$$

इस फलन का अध्ययन हाल ही में राठी[8] ने किया। उन्होंने (1.2) के दाहिने पक्ष के समाकल के अभिसारी की तीन अलग-अलग शर्तें ज्ञात कीं। अपने अन्य शोध पत्र में राठी[2] ने दर्शाया कि

$$\tilde{H}(z)\sim 0(z^{\lambda}) \tag{1.4}$$

$z$ के अल्पमान के लिए जहाँ

$$\lambda=\min_{i\leqslant j\leqslant m}\left(\frac{\beta_j}{B_j}\right)$$

## 2. प्रमुख अवकलन सूत्र

प्रस्तुत प्रपत्र में $\bar{H}$-फलन के लिए निम्न व्यापक अवकलन सूत्र स्थापित किया जायेगा।

$$(s_n-c_n\, x^{r_n}) \ldots (s_1-c_1\, x^{r_1}) \left\{x^{\lambda}\ \bar{H}_{p\ q}^{m\ n}\left[zx^4 \,\middle|\, \begin{matrix} 1\ (\alpha_j, A_j; a_j)_p \\ 1\ (\beta_j, B_j;\ b_j)_q \end{matrix}\right]\right\}$$

$$=x^{\lambda}+\sum_{i=1}^{n} r_i \quad \bar{H}^{m_1 \quad n_1+n}_{p_1+n \quad q_1+n}\left[ zx^4 \left| \begin{matrix} 1(c_i-\lambda-t-\sum_{j=1}^{i-1} r_j,\, u;\, 1)_n,\ 1(a_j,\, A_j;\, a_j)_p \\ 1(\beta_j,\, B_j;\, b_j)_q,\ 1(1-\lambda-t_i+c_i-\sum_{j=1}^{i-1} r_j,\, u;\, 1)_n \end{matrix} \right. \right] \tag{2.1}$$

जहाँ $\sigma>0$.

## 3. उपपत्ति

सूत्र (2.1) को सिद्ध करने के लिए (2.1) के वामपक्ष के व्यंजक में $\bar{H}$-फलन को परिभाषित (1.2) की सहायता से तथा (1.1) में दिये गये सूत्र से हल करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है।

$$=(2\pi i)^{-1}\int_L \phi(s)\, z^s \prod_{i=1}^{n} (\lambda+t_i-c_i+\sum_{j=1}^{i-1} r_j+us)\, x^{\lambda}+us+\sum_{i=1}^{n} r_i\, ds$$

अब $a=\dfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}$ का प्रयोग करने पर

$$\prod_{i=1}^{n} (\lambda+t_i-c_i+\sum_{j=1}^{i-1} r_j+us)=\frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(\lambda+1+t_i-c_i+\sum_{j=1}^{i-1} r_j+us)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(\lambda+t_i-c_i+\sum_{j=1}^{i-1} r_j+us)}$$

प्राप्त समीकरण में $\bar{H}$-फलन की परिभाषा का प्रयोग करें तो हमें वांछित फल (2.1) प्राप्त होता है।

## 4. विशिष्ट दशाएँ

1. सूत्र (2.1) में यदि हम $r_i=0,\ t_i=1$ लें तो हमें देवड़ा एवं राठी द्वारा ज्ञात परिणाम प्राप्त होता है।

2. सूत्र (2.1) में यदि हम $r_i=t_i=0$ ले तो हमें देवड़ा एवं राठी का अन्य ज्ञात परिणाम प्राप्त होता है।

3. सूत्र (2.1) में यदि हम $t_i=c_i=0$ लें तो हमें देवड़ा एवं राठी का अन्य ज्ञात परिणाम प्राप्त होता है।

4. सूत्र (2.1) में $t_i=r_i+1,\ c_i=0$ लें तो हमें देवड़ा एवं राठी का अन्य ज्ञात परिणाम प्राप्त होता है।

उपरोक्त चारों परिणामों में पुनः विशिष्टीकरण से नायर, गुप्ता एवं जैन के $\bar{H}$-फलन के अवकलन सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं।

## निर्देश

1. देवड़ा तथा राठी, **विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका**, 1993, **36**, (2), 107-113.
2. बुशमान, आर० जी०, श्रीवास्तव, एच० एन०, Phys. A, Math. Gen., 1990, **23**, 4707-10.
3. हुसैन, इनायत, J. Phys. A, Math. Gen., 1987, **20**, 4119-4141.
4. गुप्ता, के० सी० तथा जैन, यू० सी०, Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1968, **38A**, 189-192.
5. नायर, वी० सी०, India Math. Soc., 1973, **31**, 329-334.
6. नायर, वी० सी०, Math. Student, 1972, **10**, 54-78.
7. राठी, ए० के०, Education (प्रकाशाधीन स्वीकृत), 1993.
8. सामर, एम० एस० पी-एच० डी० थीसिस राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर, 1974.

Vijnana Partshad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 3, 1994

# हृदय के निलय का कार्य और महाधमनियों की स्पन्दन शक्ति

केशव कुमार
एनाटमी विभाग, चिकित्सा विज्ञान संस्थान, काशी हिन्दू विश्व विद्यालय, वाराणसी

[ प्राप्त—मई 20, 1993 ]

## सारांश

मृत्यूपरान्त 300 ऐसे प्रौढ़ व्यक्तियों की, जो किसी भी प्रकार की हृदय अथवा रक्त वाहिकाओं की बीमारी से पीड़ित नहीं थे, एसेंडिंग एओर्टा, पल्मोनरी ट्रंक, दाहिने निलय, बायें निलय की दीवाल की मोटाई की माप ली गई। महाधमनियों की माप हृदय से एक सेमी० की दूरी पर ली गई जबकि निलयों की माप हृदय के एपेक्स और क्रक्स के मध्यविन्दु पर ली गई।

बायें और दाहिने निलय की मोटाई की मध्यमान माप क्रमश: 6 मिमी० तथा 2 मिमी थी जबकि एसेंडिग एओर्टा और पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की मध्यमान माप क्रमश: 1.5 मिमी० तथा 0.5 मिमी० पायी गयी जो हृदय के दोनों निलयों की दीवाल की मोटाई की तरह ही दोनों महाधमनियों की दीवाल की मोटाई के बीच भी तीन और एक का अनुपात प्रदर्शित कर रही थी। परन्तु बायें निलय और एसेंडिग एओर्टा की दीवाल की मोटाई के बीच चार और एक का अनुपात पाया गया जो दाहिने निलय और पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की मोटाई के बीच के अनुपात से समानता रखता था।

चूँकि किसी धमनी की दीवाल की मोटाई और उस धमनी की स्पन्दन शक्ति अथवा कार्य के बीच सीधा अनुपात होता है अत: यह निर्धारित किया गया कि हृदय की प्रत्येक धड़कन के अन्तर्गत दोनों निलयों द्वारा किया गया प्रक्षेपण कार्य महाधमनियों द्वारा किये गये स्पन्दन कार्य से चार गुना अधिक होता है जबकि दाहिने निलय का प्रक्षेपण कार्य और/अथवा पल्मोनरी ट्रंक का स्पन्दन कार्य बायें निलय के प्रक्षेपण कार्य और/अथवा एसेंडिग एओर्टा के स्पन्दन कार्य से तीन गुना कम होता है।

## Abstract

**Ventricular work of heart and pulsatory power of great arterial trunks.** *By* Keshaw Kumar, Department of Anatomy, Institute of Medical Sciences. Banaras Hindu University, Varanasi.

During autopsy wall thickness of ascending aorta, pulmonary trunk, left ventricle and right ventricle was measured in 300 human adults who had no history of suffering from any 'cardiovascular disease. Measurements of great arterial trunks were taken 1 cm distal to their commencements while ventricles were measured midway between the apex and crux of heart.

Mean thichness of wall of left and right ventricles was 6 mm and 2 mm while in case of ascending aorta and pulmonary trunk it was 1,5 mm and 0.5 mm respectively showing the ratio of 3 : 1 between wall thickness of ventricles as well as great arterial trunks. But the datio between wall thickness of left ventricle and ascending aorta was 4 : 1 which equalled with ratio between wall thckness of right ventricle and pulmonary trunk.

Because arterial wall thickness is directly proportional to its pulsatory power/work (Keshaw Kumar, 1988) therefore, it is concluded that during each heart beat ejectory work of ventricles is four times greater than the pulsatory work of great arterial trunks while the ejectory work of right ventricle and/or pulsatory work of pulmonary trunk is three times lesser than the ejectory work of left ventricle and/or pulsatory work of ascending aorta respectively.

राइट ने[1] मनुष्य के एओर्टिक आर्च (महाधमनी चाप) के मापन तथा विच्छेदन का अध्ययन किया । ग्रीनफील्ड तथा पटेल[2] ने मनुष्य की ऊर्ध्वमहाधमनी (एसेंडिंग एओर्टा) के व्यास तथा रक्त के दाब के बीच सम्बन्ध का निरीक्षण किया । रेमिंगटन[3] ने महाधमनी (एओर्टा) तथा अन्य प्रमुख धमनियों की कार्य की का वर्णन किया । वेन[4] ने परिधीय धमनियों की स्पन्दन क्रिया को प्रदर्शित किया । केशव कुमार ने[5] धमनियों में स्पन्दन के नियमों का उल्लेख किया तथा स्पन्दन शक्ति की गणना की

प्रस्तुत अध्ययन हृदय के निलय द्वारा रक्त के प्रक्षेपण कार्य तथा महाधमनियों के स्पन्दन कार्य के तुलनात्मक अध्ययन तथा बायें और दाहिने निलय के प्रक्षेपण बल की गणना करने के दृष्टिकोण से संचालित किया गया जो अभी तक किसी अन्य लेखक द्वारा नहीं किया गया है ।

## अध्ययन प्रक्रिया

मृत्यूपरान्त ऐसे 300 प्रौढ़ व्यक्तियों की जो किसी भी प्रकार की हृदय अथवा रक्त वाहिकाओं की बीमारी से पीड़ित नहीं थे, एसेंडिंग एओर्टा, पल्मोनरी ट्रंक, बायें निलय तथा दाहिने निलय की दीवाल की मोटाई की माप ली गई । एसेंडिंग एओर्टा और पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की मोटाई की माप हृदय से इनके उद्गम से एक सेन्टीमीटर की दूरी पर ली गई जबकि बायें निलय और दाहिने निलय की दीवाल की मोटाई की माप हृदय के एपेक्स तथा क्रक्स (Crux) के मध्य विन्दु पर ली गई ।

## परिणाम तथा विवेचना

1. बायें और दाहिने निलय की दीवाल की मोटाई की मध्यमान माप क्रमशः **6 मिमी० और 2** मिमी० पायी गई जबकि एसेंडिग एओर्टा और पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की मोटाई की मध्यमान माप क्रमशः 1.5 मिमी० और 0.5 मिमी० थी।

2. $$\frac{\text{बायें निलय की दीवाल की मोटाई}}{\text{दाहिने निलय की दीवाल की मोटाई}}=\frac{\text{एसेंडिग एओर्टा की दीवाल की मोटाई}}{\text{पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की मोटाई}}=\frac{3}{1}$$

$$\frac{6\ \text{मिमी०}}{2\ \text{मिमी०}}=\frac{1.5\ \text{मिमी०}}{0.5\ \text{मिमी०}}=\frac{3}{1}$$

3. $$\frac{\text{बायें निलय की दीवाल की मोटाई}}{\text{एसेंडिग एओर्टा की दीवाल की मोटाई}}=\frac{\text{दाहिने निलय की दीवाल की मोटाई}}{\text{पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की मोटाई}}=\frac{4}{1}$$

$$\frac{6\ \text{मिमी०}}{1.5\ \text{मिमी०}}=\frac{2\ \text{मिमी०}}{0.5\ \text{मिमी०}}=\frac{4}{1}$$

4 बायें/दाहिने निलय की दीवाल की मोटाई $\propto$ हृदय की प्रत्येक धड़कन के अन्तर्गत बायें/दाहिनेनिलय द्वारा किया गया प्रक्षेपण कार्य

एसेंडिग एओर्टा/पल्मोनरी ट्रंक की दीवाल की मोटाई $\propto$ हृदय की प्रत्येक धड़कन के अन्तर्गत एसेंडिग एओर्टा/-पल्मोनरी ट्रंक द्वारा किया गया स्पन्दन कार्य

(क्योंकि शक्ति/कार्य धमनी की दीवाल की मोटाई के समानुपाती होता है केशव कुमार[5] शक्ति/कार्य स्पन्दन/प्रक्षेपण से सम्बन्धित हो सकता है)

5. एक मिली मीटर दीवाल की मोटाई=2000 जूल शक्ति/कार्य जो कि प्रति हृदय धड़कन स्पन्दन/प्रक्षेपण से सम्बन्धित हो सकता है (केशव कुमार[5])

प्रति हृदय धड़कन स्पन्दन कार्य= प्रति हृदय धड़कन स्पन्दन शक्ति

6. $$\frac{\text{बायें निलय द्वारा किया गया प्रक्षेपण कार्य}}{\text{दाहिन निलय द्वार किया गया प्रक्षेपण कार्य}}=\frac{\text{एसेंडिग एओर्टा द्वारा किया गया स्पन्दन कार्य}}{\text{पल्मोनरी ट्रंक द्वारा किया गया स्पन्दन कार्य}}=\frac{3}{1}$$

$$\frac{12000\ \text{जूल}}{4000\ \text{जूल}}=\frac{3002\ \text{जूल}}{1000\ \text{जूल}}=\frac{3}{1}$$

7. $$\frac{\text{बायें निलय का प्रक्षेपण कार्य}}{\text{एसेंडिंग एओर्टा का स्पन्दन कार्य}} = \frac{\text{दाहिने निलय का प्रक्षेपण कार्य}}{\text{पल्मोनरी ट्रंक का स्पन्दन कार्य}} = \frac{4}{1}$$

$$\frac{12000 \text{ जूल}}{3000 \text{ जूल}} = \frac{4000 \text{ जूल}}{1000 \text{ जूल}} = \frac{4}{1}$$

8. $$\frac{\text{बायें निलय के प्रक्षेपण कार्य तथा एसेंडिंग एओर्टा के स्पन्दन कार्य का योग}}{\text{दाहिने निलय के प्रक्षेपण कार्य तथा पल्मोनरी ट्रंक के स्पन्दन कार्य का योग}}$$
$$= \frac{15000 \text{ जूल}}{5000 \text{ जूल}} = \frac{3}{1}$$

9. $$\frac{\text{बायें निलय के प्रक्षेपण कार्य तथा एसेंडिंग एओर्टा के स्पन्दन कार्य का अन्तर}}{\text{दाहिने निलय के प्रक्षेपण कार्य तथा पल्मोनरी ट्रंक के स्पन्दन कार्य का अन्तर}}$$
$$= \frac{9000 \text{ जूल}}{3000 \text{ जूल}} = \frac{3}{1}$$

10. बायें निलय का प्रक्षेपण कार्य = प्रक्षेपण बल × प्रति हृदय धड़कन विस्थापित किये गये रक्त का आयतन

12000 जूल = प्रक्षेपण बल × 60 मिली०

$$\text{बायें निलय का प्रक्षेपण बल} = \frac{12000 \text{ जूल}}{60 \text{ मिली}} = 200 \text{ न्यूटन प्रति हृदय धड़कन}$$

11. दाहिने निलय का प्रक्षेपण कार्य = प्रक्षेपण बल × प्रति हृदय धड़कन विस्थापित किये गये रक्त का आयतन

4000 जूल ‖ प्रक्षेपण बल × 60 मिली०

$$\text{दाहिने निलय का प्रक्षेपण बल} = \frac{4000 \text{ जूल}}{60 \text{ मिली०}} = 66.67 \text{ न्यूटन प्रति हृदय धड़कन}$$

## निर्देश

1. राइट, एन० एल०, जे० एनाट० 1969, 104, 377-385.
2. ग्रीनफील्ड, जे० सी० तथा पटेल, डी० जी०, सर्कुलेशन रिसर्च, 1962, 10, 778-781.
3. रेमिंगटन, जे० डबल्यू०, इन हैण्ड बुक आफ फिजियोलोजी, 1963, सेक्शन 2, सर्कुलेशन, वाल्यूम 2, पेज 799-835, वाशिंगटन, डी० सी० : अमेरिकन फिजियोलोजिकल सोसायटी.
4. वेन, पी० एस०, स्कैण्ड ज० क्लिनि० लैबा० इनवेस्ट, 1957, 9, सप्लीमेन्टरी, 30, 1.
5. केशव कुमार, विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका, 1993, 36, 11-120.

# भारतीय कृषि अनुसंधान पत्रिका

अन्तर्राष्ट्रीय पत्रिका मानक संख्या (ISSN 0303-3821)
**(कृषि तथा पशु-विज्ञान-शोध की प्रथम त्रिमासिक हिन्दी पत्रिका)**

भारतीय वैज्ञानिकों द्वारा कृषि तथा पशु अनुसंधान के क्षेत्र में किये गये नये-नये अनुसंधानों को प्रयोगशाला से सीधे खेतों (Lab to Land) में ले जाना इस पत्रिका का प्रथम तथा मुख्य उद्देश्य है, ताकि भारतवर्ष के कृषक यह जान सकें कि हमारे देश के अनुसंधान संस्थाओं तथा विश्वविद्यालयों में कौन-2 सी नई खोजें हुई हैं, जिनको हमारे किसान भाई सरल भाषा हिन्दी में पढ़कर पूरा-2 लाभ उठा सकें। इस पत्रिका का दूसरा उद्देश्य है राष्ट्र भाषा हिन्दी को वैज्ञानिक-अनुसंधान के स्तर तक ले जाना, जैसा कि संसार के सभी विकसित देशों की अपनी भाषाओं में अनुसंधान पत्रिकायें प्रकाशित होती हैं। आपकी इस पत्रिका का संसार में वही स्थान होगा जो रूस, जर्मनी, जापान, चीन, फ्रांस आदि स्वतंत्र देशों की अपनी भाषाओं में छपी पत्रिकाओं का है। आशा है देश के सभी वैज्ञानिक इस पत्रिका को सफल बनाने तथा अपने लेखों को शीघ्र छपवाने में हमें अपना पूरा-2 सहयोग देगें।

कृषि तथा पशु अनुसंधान कार्य में लगे देश के सभी वैज्ञानिकों से मेरा अनुरोध है कि वे अपने शोध लेख सरल हिन्दी भाषा में लिखकर अपनी प्रिय राष्ट्र भाषा की प्रिय शोध पत्रिका "भारतीय कृषि अनुसंधान पत्रिका" में प्रकाशन हेतु भेजें तथा लेख के निम्नलिखित भाग करें : :—

सारांश, प्रस्तावना, सामग्री एवं परीक्षण विधि, परिणाम एवं विवेचना तथा सन्दर्भ। अपने लेख के साथ-साथ कृपया अंग्रेजी भाषा में एक ABSTRACT भी भेजें जो 100 शब्दों से अधिक न हो। यह Abstract संसार के प्रमुख Abstracting Journals जैसे Chemical Abstracts, Biological Abstracts, Plant Breeding Abstracts, Soils and Fertilizers, all C. A. B. Abstracting journals, Agrindex (FAO) तथा Indian Science Abstracts (INSDOC) में प्रकाशित किया जायेगा। अंत: लेखकों से मेरा अनुरोध है कि इस में भेजे लेख को किसी भी अन्य पत्रिका में किसी भी भाषा में न भेजें।

पत्रिका को सफल तथा प्रमाणित बनाने के लिये यह भी आवश्यक है कि इसमें छपे सभी लेख विशेषज्ञों द्वारा निरीक्षित होने चाहिये। अत: हिन्दी जानने वाले सभी वैज्ञानिकों से मेरा निवेदन है कि जो वैज्ञानिक राष्ट्र भाषा के उत्थान के इस महान कार्य में सहर्ष अपना योगदान देना चाहते हैं वे कृपया लेखों को निरीक्षण करने की स्वीकृति हमें भेजें।

भवदीय :

आर० डी० गोयल
प्रबन्ध सम्पादक, भारतीय कृषि अनुसंधान समिति
1130 सदर, करनाल-132001 (हरियाणा)।

पुस्तकालयों हेतु
वार्षिक चन्दा रु० 150/-मात्र

**मूल्य**

वार्षिक मूल्य : [illegible] रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य ; 15 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

**Rates**

Annual Rs. 60 *or* 12 £ *or* $ 40
Per Vol. Rs. 15 *or* 3 £ *or* $ 10

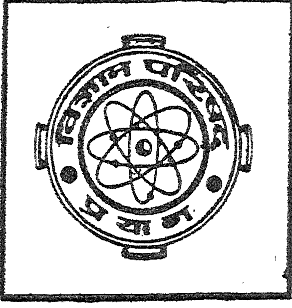
प्रकाशक :

विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद

ISSN 0505-5806




# VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

# विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 37 October 1994 No. 4

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टैक्नॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्·इलाहाबाद

# विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 4, 1994

# राजस्थान के साँप

सतीश कुमार शर्मा
क्षेत्रीय वन अधिकारी, अरावली वृक्षारोपण परियोजना,
झाडोल (फ०), जिला-उदयपुर (राज०)

[ प्राप्त—फरवरी 21, 1994 ]

**सारांश**

संसार में साँपों की 2700 प्रजातियाँ ज्ञात हैं जिनमें से भारत में 233 पाई जाती हैं जिनमें से राजस्थान में 29 प्रजातियाँ ज्ञात हैं। राजस्थान में मिलने वाली 13.80% प्रजातियाँ ही विषैली हैं। वैसे तो राजस्थान में सभी जगह साँप मिलते हैं परन्तु पश्चिमी तथा पूर्वी राजस्थान की तुलना में दक्षिणी राजस्थान में अधिक प्रकार तथा संख्या में साँप मिलते हैं। राजस्थान में साँपों के बारे में अनेक अन्ध-विश्वास प्रचलित हैं परन्तु वैज्ञानिक दृष्टिकोण से उनका कोई आधार नहीं है।

**Abstract**

**Snakes of Rajasthan.** *By* Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer, Arawalli Afforestation Project, Jhadol (F.), Dist. Udaipur (Raj.).

As many as 2700 species of snakes are known in the world, out of which 233 species are confined to India and 29 are confined to the State of Rajasthan. Rajasthan contains 13.80% poisonous species only. Though snakes are distributed in whole of Rajasthan but its southern part is more rich than western and eastern parts both in number as well as specieswise. There are so many superstitions among people about the serpents but they have hardly any scientific base.

संसार में साँपों की 2700 प्रजातियाँ ज्ञात हैं[1] जिनमें भारत में 233 प्रजातियाँ पायी जाती हैं[2]। प्रस्तुत अध्ययन में राजस्थान के भौगोलिक क्षेत्र में साँपों के वितरण एवं अन्य पहलुओं का अध्ययन किया गया है। राजस्थान के भौगोलिक क्षेत्र में साँपों के वितरण का अच्छा ब्यौरा स्मिथ[3], व्हीटेकर[1], देवरस[4] तथा डेनियल[5] के कार्य से मिलता है।

सारणी 1

राजस्थान के साँपों की सूची

| कुल | साँप का वैज्ञानिक नाम | अँग्रेजी नाम | राजस्थान में स्थानीय नाम | विषहीन/विषैला | आवास | 1980 से 1993 तक कितनी बार देखा गया |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. टिफलोपिडी (Typhlopidae) | 1.2.1 **Typhlops porrectus** | Slender Worm Snake | — | विषहीन | भूमिगत | * |
| | 1.2.2 **Typhlops bramina** | Common Worm Snake | अंधासाँप | ,, | ,, | 011 |
| | 1.3.3 **Typhlops acutus** | Beaked Worm Snake | — | ,, | ,, | * |
| 2. बोईडी (Boidae) | 2.1.4 **Python molurus** | Indian Python | अजगर, कोट, चित्ती | ,, | अर्द्ध जलीय व नम आवास | 5** |
| | 2.2.5 **Eryx conicus** | Common/Russel's Earth Boa | दुम्बई, कम्बई, दम्बी, दुमुही, दो-मुँहा | ,, | थलीय, पथरीले क्षेत्र | 15 |
| | 2.3.6 **Eryx johnii** | Red/Blunt-tailed or John's Earth Boa | ,, | ,, | थलीय शुष्क क्षेत्र | 37 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3. | डिप्सेडिडि (Dipsadidae) | 3.1.7 **Lycodon aulious** | Common Wolf Snake | ,, | ,, | आबादी क्षेत्र पथरीले क्षेत्र | 27 |
| | | 3.2.9 **Lycodon striatus** | Barred Wolf Snake or Shaw's Wolf Snake | ,, | ,, | पथरीले क्षेत्र | 3 |
| | | 3.3(1).10 **Oliogodon taeniotaius** | Russell's or Variegated Kukri Snake | ,, | ,, | पथरीले वनाच्छादित क्षेत्र | * |
| | | 3.4(2).10 **Oligodon arnensis** | Common Kukri Snake | ,, | ,, | आबादी एवं मैदानी क्षेत्र | 1 |
| 4. | नेट्रीसिडी (Natricidae) | 4.1.11 **Amphiesma stolata** | Striped Keelback or Buff Striped Keelback | ,, | ,, | वन, कृषि व घास क्षेत्र | 55 |
| | | 4.2.12 **Macropisthodon plumbicolor** | Green keelback | हरा साँप | ,, | पर्वतीय क्षेत्र | 100+ |
| | | 4.3.13 **Xenochrophis pisoator** | Chekered Keelback | पणेटा, पणियाला, पानी का साँप, डिंडोलिया | ,, | कुये, नदी, नाले, जलाशय | 300+ |
| | | 4.4.14 **Atretium schistosum** | Olive Keelback Water Snake | — | ,, | जलाशय | * |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5. | कोल्यूब्रिडी (Colubridae) | 5.1.15 **Elaphe helena** | Common Trinket Snake | — | ” | वनों के बाहरी क्षेत्र | 41 |
| | | 5.2.16 **Ptyas mucosus** | Rat Snake/ Dhaman | धामण | ” | मैदानी व आबादी क्षेत्र | 20 |
| | | 5.3.17 **Argyrogena ventrimaculata** | Gray's Rat snake | — | ” | पहाड़ी व मैदानी क्षेत्र | 1 |
| | | 5.4.18 **Spalerosophis diadema** var. **atriceps** | Royal or Diadema Snake | घोड़ापछाड़, रजीतबंसर, सटक, चीतल | ” | शुष्क एवं अर्द्ध शुष्क | 35 |
| | | 5.5.19 **Spalerosophis arenarius** | Red-spotted Snake | — | ” | शुष्क क्षेत्र | * |
| | | 5.5.20 **Liopeltis calamaria** | Lesser Striped-neck snake | — | ” | पर्वतीय क्षेत्र | * |
| | | 5.6.21 **Dendrelaphis tristis** | Common Indian Bronzeback or Tree Snake | उड़ना, उड़नी, उड़ना साँप | ” | वृक्ष एवं झाड़ी आच्छादित क्षेत्र | 12 |
| | | 5.7(1).22 **Psammophis schokari** | Desert Sand Snake | — | ” | शुष्क क्षेत्र | * |
| | | 5.8(2).23 **P.leithi** | Leith's Sand Snake | — | ” | शुष्क क्षेत्र | * |
| | | 5.9.24 **Ahaetulla nasutus** | Common vine or Common Green Whip Snake | बाँस का साँप | ” | वृक्ष आच्छादित क्षेत्र | 5 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6. | होमालोप्सिडी (Homalopsidae) | 6.1.25 | **Boiga trigonata** | Common Cat Snake | — | " | वृक्षीय आवास | 25 |
| 7. | एलाफिडी (Elaphidae) | 7.1.26 | **Bungarus caeruleus** | Common Krait | — | विषैला | खेत व झाड़ी क्षेत्र | 2 |
| | | 7.2.27 | **Naja naja** | Binocellate or Spectacled or Common Cobra *** | काला नाग | " | मैदानी, वन, कृषि क्षेत्र | 100+ |
| 8. | वाईपेरीडी (Viperiadae) | 8.1.28 | **Vipera russelli** | Russell's Viper | चित्ती | " | खुले क्षेत्र | 7 |
| | | 8.2.29 | **Echis carinatus** | Saw-scaled Viper | उन्नापेडा, कंकरोटा, कांकरी वाला, क्रिल्ड बिल्डिया | " | शुष्क क्षेत्र | 100+ |

* चिन्हित सांप सर्वे के दौरान जीवित या मृत संग्रह नहीं किये गये हैं। उनकी उपस्थिति व्हिटेकर (1978), देवरस (1981) तथा डेनियल (1983) के सन्दर्भों के आधार पर दर्ज की गई है।

** घना राष्ट्रीय उद्यान, भरतपुर के अजगरों की संख्या सम्मिलित नहीं की गई है।

*** एक सूर्य मुखी (Albino) कोबरा देखा गया।

\+ चिन्ह वाले सांपों की दर्ज संख्या लेखक ने स्वयं देखी है जो रेकार्ड में दर्ज की गई। इन जातियों के अन्य नमूनों की विभिन्न जिलों से सूचना प्राप्त हुई है। परन्तु व्यक्तिगत न देखे जाने के कारण उनकी संख्या यहाँ दर्ज संख्या में जोड़ी नहीं गई है तथा उनकी अतिरिक्त संख्या को + से दर्शाया गया है।
(जो सांप पूर्ण विषहीन हैं, या जिनका विष मनुष्य के लिए घातक नहीं है या जिनके मुंह में विषदन्त गले की तरफ स्थित होने से मनुष्यों के लिए निरापद हैं, उन्हें विषहीन वर्ग में रखा गया है।)

### अध्ययन क्षेत्र एवं उसकी पारिस्थितिकी

प्रस्तुत अध्ययन राजस्थान में 1980 से 1993 तक किया गया है। राजस्थान में वर्षा काफी कम (100 मिमी० से 800 मिमी० तक) होती है। अरावली पर्वतमाला दक्षिण-पश्चिम से उत्तर-पूर्व दिशा में तिरछी चलती हुई राज्य को दो भागों में बाँटती है। अरावली के पश्चिम में मरु-प्रदेश फैला हुआ है। यहाँ वनस्पति-सघनता बहुत कम है तथा पूर्व में मैदानी क्षेत्र का फैलाव है। अरावली पर्वतमाला का दक्षिण में अधिकतम फैलाव है तथा उत्तर की तरफ बढ़ने पर इसकी चौड़ाई क्रमशः घटती चली जाती है। सिरोही जिले में माउण्ट आबू अरावली की सर्वाधिक ऊँची चोटी है। माउण्ट आबू पर अर्द्ध सदाबहार वन पाये जाते हैं जबकि शेष अरावली में पतझड़ी वन पाये जाते हैं। दक्षिण अरावली के वनों में अकंटकीय वनस्पति प्रमुख है जबकि मध्य एवं उत्तरी अरावली में कंटकीय वनस्पति प्रमुख है। दक्षिणी अरावली में नदी-नाले एवं जलाशयों की संख्या अधिक है। इस क्षेत्र में 800 मिमी० तक वर्षा होती है तथा वनों की सघनता ज्यादा है। राजस्थान के धुर पूर्व में कोटा-झालावाड़ संभाग में विंध्याचल पर्वतमाला का फैलाव है।

### अध्ययन प्रक्रिया

साँपों की उपस्थिति सम्बन्धी सर्वे कार्य करने के लिए वन विभाग तथा अन्य विभागों द्वारा बनाये गये बिना पैरापेट दीवार के हौदों का उपयोग किया गया है। बिना पैरापेट दीवार वाले हौदों में साँप दुर्घटनावश गिर जाते हैं (शर्मा[6])। साँप अच्छे तैराक होते हैं अतः पानी में डूब कर नहीं मरते। सर्वे के दौरान जगह-जगह बिना पैरापेट दीवारों के हौदों में गिरे साँपों को इकट्ठा किया गया तथा उनकी पहचान की गई। साथ ही सड़कों पर कुचल कर मारे गये साँपों को भी संग्रह किया गया एवं उनकी पहचान की गई। सड़कों पर मरे साँप आसानी से प्राप्त किये जा सकते हैं तथा क्षेत्र विशेष के साँपों का अध्ययन करने में बहुत सहायक सिद्ध होते हैं (शर्मा[7,8])। खेतों में भी सर्वे कार्य किया गया (शर्मा[9])। घास-फूस, भूसे तथा अन्य कृषि उत्पादों के ढेर के नीचे अक्सर साँप मिल जाते हैं। कृषि क्षेत्र में कुओं, तालाबों एवं नदी-नालों में जलीय साँपों हेतु अवलोकन किया गया। वन विभाग की विभिन्न पौधशालाओं में पौधों की प्लास्टिक की थैलियों के नीचे से भी विभिन्न तरह के साँप संग्रह किये गये। जहाँ-जहाँ से साँप पकड़े गये या संग्रह किये गये, वहाँ के स्थानीय लोगों को दिखा कर उन साँपों के बारे में विभिन्न जानकारी संग्रह की गई।

## परिणाम तथा विवेचना

अध्ययन के दौरान विभिन्न प्रकार के साँप देखे और पकड़े गये। व्हिटेकर, देवरस तथा डैनियल के ब्यौरों को शामिल करते हुए राजस्थान में साँपों की सूचीसारणी 1 की तरह हो जाती है।

प्रस्तुत अध्ययन से तथा पूर्ववर्ती सूचनाओं से यह स्पष्ट होता है कि राजस्थान में साँपों की 25 प्रजातियाँ विषहीन तथा 4 विषैली पाई जाती हैं अर्थात् राजस्थान में पाये जाने वाले साँपों में मात्र 13.80% प्रजातियाँ ही जहरीली हैं।

## राजस्थान में साँपों का वितरण

राजस्थान में साँपों का वितरण समान नहीं है। पश्चिमी एवं पूर्वी राजस्थान में साँपों की कम प्रजातियाँ एवं कम संख्या मिलती हैं जबकि दक्षिणी राजस्थान में न केवल अधिक प्रजातियाँ मिलती हैं बल्कि उनकी संख्या भी काफी अधिक है। दक्षिणी राजस्थान में राजसमंद, उदयपुर, सिरोही, डूँगरपुर तथा बाँसवाड़ा में साँपों की बहुतायत है। इस भाग में सघन वन क्षेत्र होना, आवास-विविधता होना तथा जलवायु का अधिक अनुकूल होना इसके कारण हो सकते हैं।

सारणी 2

राजस्थान के विभिन्न क्षेत्रों में प्रमुख (dominant) जातियों का विवरण

| क्षेत्र | प्रमुख प्रजातियाँ |
|---|---|
| पश्चिमी क्षेत्र | एरिक्स जोहनाई, सामोफिस शौकराई, सोमाफिस लेथाई, नाजा नाजा, एकिस केरीनेट्स आदि। |
| पूर्वी क्षेत्र* | एरिक्स जोहनाई, टायास म्यूकोसस, आर्गाईरोजीना वेन्ट्रीमेक्यूलेटा, जीनोक्रोपिस पिस्केटर, स्पेलेरोसोफिस डायडैमा, स्पे० आरेनेरियस, बोईगा ट्राईगोनेटा, नाजा नाजा, एकिस केरीनेट्स, आदि। |
| दक्षिणी क्षेत्र | टिफ्लोप्स जातियाँ, पाईथन मोल्यूरस, एरिक्स कोनिकस, लाईकोडोन प्रजातियाँ, ओलिगोडौन जातियाँ, एम्फीस्मा स्टोलाटा, मेक्रोपिस्थोडौन प्लम्बीकलर, जीनोक्रोपिस पिस्केटर, हलेफे हेलेना, डैन्ड्रेलेफिस ट्रिस्ट्रिस, एहीटुल्ला नेस्ट्स, बोईगा ट्राईगोनेटा, बुंगारस, सीरुलियस, नाजा नाजा, वाईपेरा रसेलाई, एकिस केरिनेटस आदि। |

* पूर्वी राजस्थान में घना राष्ट्रीय उद्यान, भरतपुर में अजगरों की सघन उपस्थिति ज्ञात है। दक्षिणी राजस्थान में साँपों की वे प्रजातियाँ अधिक हैं जो पर्वतीय एवं वन क्षेत्रों को पसन्द करती हैं। पूर्वी राजस्थान में जयपुर जिले में रामगढ़ झील के पास **बोईगा ट्राईगोनेटा** को बया पक्षी के घोसलों से पकड़ा गया है जिससे इस साँप की न केवल वृक्षीय-प्रवृत्ति का पता चलता है, बल्कि भोजन हेतु पक्षियों से विशिष्ट सम्बन्धों का भी पता लगता है।

## राजस्थान में सर्पदंश की घटनायें

राजस्थान देश के उन अग्रणी राज्यों में शामिल हैं जहाँ सर्पदंश की संख्यायें ज्यादा होतीं हैं। इस तथ्य का आभास सारणी 3 से मिलता है :

सारणी 3

भारत के छः सर्वाधिक सर्पदंश वाले राज्य

| क्रमांक | राज्य | सर्पदंश प्रकरण | मृत्यु |
|---|---|---|---|
| 1 | प० बंगाल | 7234 | 488 |
| 2 | गुजरात | 2274 | 62 |
| 3 | मध्य प्रदेश | 1612 | 20 |
| 4 | राजस्थान | 1426 | 62 |
| 5 | उत्तर प्रदेश | 1351 | 84 |
| 6 | केरल | 1142 | 361 |

(उक्त आँकड़े वर्ष 1969 के हैं जो देवरस[4] से साभार लिये गये हैं।)

राजस्थान में सर्वाधिक सर्पदंश की घटनायें दक्षिणी राजस्थान में होती हैं। इसके निम्नलिखित कारण हैं :

1. दक्षिणी राजस्थान में साँप प्रजातिवार एवं संख्यावार अपेक्षाकृत अधिक संख्या में मिलते हैं।
2. चारों महाविषधर दक्षिणी राजस्थान में पाये जाते हैं।
3. दक्षिणी राजस्थान जनजाति बहुल (Tribal dominated) क्षेत्र है। यहाँ भील, डामोर, गरासिया, कथोडी आदि जातियाँ वनों में छितरी हुई रह रही हैं। वनों में रहने से घास-फूस व पत्थरों में छिपे साँप अक्सर मनुष्यों को काटते रहते हैं।
4. दक्षिणी राजस्थान में निवास करने वाली जनजातियाँ प्रायः अभी भी नंगे पैर रहती हैं। इस प्रवृत्ति से भी सर्पदंश की ज्यादा सम्भावना रहती है।
5. दक्षिणी राजस्थान से वन लकड़ी, लघुवन उपज, बाँस आदि के स्रोत के रूप में लोगों को शताब्दियों से लाभ पहुँचाते रहे हैं। प्रायः जंगलों में रात्रि को चोरी-छिपे वन-उत्पाद निकास किया जाता है जिससे अँधेरे में साँपों की स्थिति का ठीक ज्ञान नहीं होने के कारण सर्पदंश की घटनायें होती हैं। अभी भी दूर-दराज के गाँवों में बिजली नहीं पहुँच पाने के कारण अँधेरे के कारण रात्रि में सर्पदंश की घटनायें होती हैं।
6. दक्षिणी राजस्थान के आदिवासी स्वभाव में निडर होते हैं। अभावों से त्रस्त लोग चारपाई नहीं उपलब्ध होने पर भूमि पर ही सो जाते हैं, जिससे नींद की हालत में वे रात्रि में विचरण करने वाले साँपों के शिकार हो जाते हैं।

7. दक्षिणी राजस्थान में ऊबड़-खाबड़ पहाड़ी तल होने से रास्तों का अत्यन्त अभाव है। प्रायः घास और वन क्षेत्र में सँकरी पगडण्डियाँ आने-जाने हेतु बनी हैं। पगडण्डियों की चौड़ाई प्रायः एक मीटर से भी कम होती है जिससे उनमें दूर तक स्पष्ट नहीं दिखाई देता एवं पगडण्डी में पड़े साँप की स्थिति का पूर्वाभास नजदीक जाने पर ही हो पाता है। इससे दुर्घटना की सम्भावना बढ़ जाती है जबकि मैदानी क्षेत्रों में चौड़े रास्ते होने से रास्ते में पड़े साँप काफी दूरी से स्पष्ट नजर आ जाते हैं एवं राह चलते राहगीर समय रहते सतर्क हो जाते हैं।

**राजस्थान में सर्पदंश के इलाज और सुरक्षा के उपाय**

आम तौर पर लोग साँपों से डरते हैं तथा साँपों से दूर रहने की चेष्टा करते हैं। साँप द्वारा काटे जाने पर प्राचीन समय में लोक इलाज का प्रचलन था। राजस्थान में साँपों के इलाज करने वाले चिकित्सक को गाडरी, भोपा, गोगाजी आदि नामों से जाना जाता है। ये स्थानीय चिकित्सक रोगी को नीम की पत्तियों का सेवन कराते हैं, मन्त्रोच्चार और झाड़ा-फूँकी कर विष उतारते हैं। यदि रोगी को नीम की पत्तियाँ चबाने पर कड़वी लगती हैं तो माना जाता है कि उसे विष नहीं चढ़ा है या उतर रहा है। यदि किसी को नीम की पत्तियाँ स्वादहीन लगती हैं तो माना जाता है कि उस पर सर्प विष असर कर रहा है। राजस्थान में, खासकर पश्चिमी भाग में गोगाजी को साँपों का देवता माना जाता है तथा सर्पदंश पर उनकी मनौतियाँ मनाई जाती हैं। कहते हैं कि स्थानीय चिकित्सक कोसों दूर पड़े रोगी का भी विष उतार देते हैं। उपर्युक्त इलाज कितने प्रभावी एवं विश्वसनीय है, कहना मुश्किल है।

शिक्षा के प्रचार-प्रसार तथा स्वास्थ्य सुविधाओं में बढ़ोत्तरी होने के साथ-साथ लोगों में चेतना आने लगी है तथा सर्पदंश के रोगियों को अब अस्पताल ले जा कर प्रतिविष दिलाने की महत्ता समझी जाने लगी है।

सर्पदंश की घटनाओं से बचने के लिए दक्षिणी राजस्थान के आदिवासी लोग घास और चारे का संग्रह भूमि पर नहीं करते बल्कि उसे वृक्षों पर या लकड़ी का ऊँचा मचान बना कर उस पर संग्रह करते हैं जिसे "डागला" कहा जाता है। चारपाई उपलब्ध नहीं होने पर प्रायः रात्रि में डागले को सोने के काम में भी लाया जाता है। इससे अनायास ही सर्पदंश की घटनाओं में कमी आती है क्योंकि भूमि पर पड़े चारे के ढेर में अक्सर साँप छिप जाते हैं।

**सर्प सम्बन्धी अन्धविश्वास**

राजस्थान में साँपों से सम्बन्धित अनेक अन्धविश्वास हैं जिनमें कुछ का विवरण शर्मा[4,8] ने प्रस्तुत किया है। कुछ आमतौर पर प्रचलित अन्धविश्वास इस प्रकार हैं :

| | अन्धविश्वास | वैज्ञानिक सच्चाई |
|---|---|---|
| 1. | काले तथा हरे साँप सबसे विषैले होते हैं। | यह सत्य नहीं है। रंग का विष से कोई सम्बन्ध नहीं है। राजस्थान में मिलने वाले ग्रीन कीलबैक तथा कामन ग्रीन व्हीप स्नेक दोनों हरे रंग के हैं किन्तु विषहीन होते हैं। नाग काले रंग का तथा कामन क्रेट सलेटी रंग का होता है तथा विषैला होता है। |

| | |
|---|---|
| 2. पतले साँप दंश कर भाग जाने में निपुण होते हैं। | डिपसेडिडी, कोल्यूब्रिडी तथा होमालोप्सिडी कुल के साँप प्रायः पतले होते हैं परन्तु सभी विषहीन हैं। |
| 3. टिफलोप्स वंश के साँप केंचुऐ (अलसिया, गिंडार) के बच्चे हैं। | टिफलोप्स वंश सरीसृप के अन्तर्गत आता है जबकि केंचुए अपृष्ठवंशी होकर ऐनेलिडा वर्ग के सदस्य हैं। |
| 4. टिफलोप्स वंश के साँप काले नाग के बच्चे हैं। | टिफलोप्स वंश के साँप प्रौढ़ हो जाने के बाद भी बहुत छोटे रहते हैं। सिर्फ छोटा आकार होने के कारण वे नाग के बच्चे नहीं हो जाते। |
| 5. साँपों के पैर न होने से चलने में कठिनाई होती है अतः इन्हें मार कर सर्प की योनि से छुटकारा दिलाने से पुण्य मिलता है। | साँपों को बिना पैर चलने में कोई तकलीफ नहीं होती। उद्‌विकास के दौरान इनके पैर लुप्त हो गये। अतः अन्धविश्वासवश इन्हें नहीं मारना चाहिए। |
| 6. जोड़े में से एक साँप को मारने पर दूसरा बदला लेता है। | नहीं। अलबत्ता साँप काटने के दौरान उसके फीरोमोन की गन्ध मारने के स्थल पर छूट जाती है जिससे उसी प्रजाति का विपरीत लिंग का कोई भी साँप सूँघ कर अपने साथी को ढूँढने का प्रयास कर सकता है जिससे भ्रमवश यह आभास हो सकता है कि वह अपने साथी के हत्यारे को ढूँढ रहा है। |
| 7. साँप को मारने वाले की तस्वीर मृत साँप की आँख में अंकित हो जाती है जिससे दूसरा साँप मारने वाले की सही पहचान कर अपने साथी की मौत का बदला लेता है। अतः मृत साँप विशेषकर काले नाग को जला देना चाहिए ताकि उसकी आँख में अंकित मनुष्य की शक्ल दूसरा साँप पहचान नहीं सके। | जीवित आँख में किसी भी वस्तु का प्रतिबिम्ब तब तक रहता है, जब तक वह वस्तु आँख के सामने रहती है। मृत्यु के बाद धीरे-धीरे आँख की पुतली अपनी पारदर्शिता खो देती है। |
| 8. जहाँ काला नाग रहता है वहाँ उसकी बांबी के नीचे दबा धन मिलता है। | साँप को एक ही स्थान पर निरन्तर बहुत दिन तक भोजन आपूर्ति सम्भव नहीं है। अतः उन्हें अपना स्थान बदलना पड़ता है। |
| 9. काले नाग के बूढ़े हो जाने पर मूँछें उग आती हैं। | शरीर पर बाल उगना स्तनधारियों का गुण है। साँपों के मूँछें नहीं उगती। साँपों के शरीर पर चकते मिलते हैं, पंख व बाल नहीं। |

| | | |
|---|---|---|
| 10. | साँप हजारों साल तक जीवित रहते हैं। | थलीय प्राणियों में सर्वाधिक आयु कछुओं की होती है। |
| 11. | साँप दूध पीता है। | साँप साबूत जीवित चूहा, मेढक, कीट-पतंगे, साँप आदि आहार के रूप में लेता है। उसका मुँह व जीभ दूध पीने हेतु अनुकूलित नहीं है, न ही प्रकृति में दूध का स्रोत उनके लिए सम्भव है। |
| 12. | साँप उड़ते हैं। | वस्तुतः साँप उड़ते नहीं हैं। कुछ वृक्षीय साँप एक वृक्ष से छलांग लगाकर दूसरे वृक्ष पर पहुँच जाते हैं। सम्भवतः छलांग लगाने की प्रक्रिया को ही उड़ान के रूप में समझने की गलती हुई है। |
| 13. | या तो दुमुँही काटती नहीं है यदि काटती है तो मनुष्य बचता नहीं है। यह हमेशा ही रविवार को काटती है। | दुमुँही बोईडी कुल का सदस्य है। इस कुल के किसी भी साँप में विष नहीं होता। साँपों को तिथियों का ज्ञान नहीं होता। |
| 14. | सफेद कोबरा (Albino Cobra) किसी का पूर्वज होता है। | त्वचा में मैलेनिनि रंजक की कमी होने के कारण सफेद कोबरा उसी तरह पैदा हो जाते हैं जैसे मनुष्यों में सूर्य-मुखी व्यक्ति पैदा होते हैं। |
| 15. | साँप संगीत सुनकर झूमता है। | साँप बाह्य कानों के न होने के कारण वायु-जनित ध्वनि तरंगें ग्रहण नहीं कर पाता। भूमि में होकर आने वाली भूमि तरंगों का ही उसे आभास हो सकता है। अतः वह संगीत सुन कर नहीं झूमता वल्कि सँपेरे द्वारा छेड़ने पर उसकी बीन के सामने खड़ा हो कर एक तरह से रक्षा-मुद्रा अपनाता है। |
| 16. | कुछ मणिधारी नाग रात्रि में मणि के प्रकाश में घूमते हैं। | साँप रात्रि में अपनी आँखों पर निर्भर नहीं होते। वातावरण का सही ज्ञान उन्हें जीभ ही कराती है। |

**राजस्थान में साँपों का संरक्षण**

साँप के बारे में न केवल अनपढ़ व्यक्तियों में बल्कि अधिसंख्य शिक्षित लोगों में भी भय, अन्ध-विश्वास एवं अज्ञानता समान रूप से मिलती है। प्रायः साँपों को देखते ही पत्थर, लाठी या तीर से मारने के प्रयास किये जाते हैं। घास-फूस के ढेर में घुसने पर उसमें आग लगाकर उसे समाप्त कर दिया जाता है। बड़े साँपों को तीर से काफी दूर से मार दिया जाता है। अजगर, काले नाग आदि को दक्षिणी राजस्थान में प्रायः तीर से मारा जाता है। कभी-कभी इस काम में बन्दूक भी लाई जाती है।

काले नाग को धार्मिक भावनावश प्रायः नहीं मारा जाता। नाग पंचमी के दिन नाग-दर्शन व नाग-पूजन जगह-जगह पर देखा जा सकता है। इस दिन कई मन्दिरों में भी नाग रखे जाते हैं। राजस्थान की घुमक्कड़ जाति कालबेलिया के लोग घर-घर जाकर नागों के दर्शन लोगों को कराते हैं तथा अनाज व अन्य सामग्री प्राप्त करते हैं। नाग पंचमी के अलावा अन्य दिनों में नाग के अलावा अजगर तथा रजीतबंसर भी कालबेलियों द्वारा लोगों को दिखाये जाते हैं। एक कालबेलिये के पास उदयपुर शहर में एक पानी का साँप भी देखा गया है।

पश्चिमी राजस्थान में साँपों के देवता गोगाजी की बहुत पूजा होती है। पूर्वी राजस्थान में अलवर जिले में कालबेलिये साँपों को कुछ समय रखने के बाद बाघ परियोजना, सरिस्का, के वनों में स्थित भर्तृहरि के मन्दिर के आस-पास छोड़ देते हैं।

राजस्थान में कृन्तकों (Rodents) की भारी समस्या है। राजस्थान के मरु क्षेत्र में अनेकानेक प्रजातियों के कृन्तक पाये जाते हैं जो कृषि फसलों को भारी नुक्सान पहुँचाते हैं। जन-सामान्य में चेतना जगा कर सर्प संरक्षण के प्रयास जरूरी हैं ताकि कृषि-पारिस्थितिकी तन्त्र में प्राकृतिक रूप से कृन्तक-नियन्त्रक बना रहे।

## कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक विभिन्न साँपों को पहचानने के लिए श्री रोमुलस व्हिटेकर, श्री जे० सी० डैनियल, प्रो० एच० आर० त्यागी का बहुत आभारी है। लेखक वन विभाग राजस्थान के उन सभी अधिकारियों-कर्मचारियों का भी आभारी है जिन्होंने इस अध्ययन में अपना सहयोग दिया है।

## निर्देश

1. दास, आई० Indian Turtles WWL. Calcutta, 1985.
2. व्हाइटकर, आर०, Common Indian Snakes, प्रकाशक मैकमिलन इण्डिया लिमिटेड, 1978
3. स्मिथ, एम०, Fauna of British India, Vol. III, 'Serpents', 1940.
4. देवरस, पी० जे०, Snakes of India, नेशनल बुक ट्रस्ट आफ इण्डिया, चतुर्थ संस्करण 1981
5. डैनियल, जे० सी०, The Book of Indian Reptiles, 1983
6. शर्मा, एस० के०, Indian Foresters, 1993, **119**(10), 849-852
7. शर्मा, सतीश कुमार, **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका**, 1988, **31**(1), 43-53
8. वही, **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका**, 1992, **35**(1), 47-60
9. वही, J. B. N. H. S. 1992, **89**(1), 133

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 4, 1994

# हाइपरज्यामितीय फलन के लिए एक संकलन सूत्र

विशाखा नागर तथा ए० के० राठी
गणित विभाग, डूँगर महाविद्यालय, बीकानेर (राजस्थान)

[ प्राप्त—अप्रैल 17, 1994 ]

## सारांश

हाइपरज्यामितीय फलन के लिए हाल ही में मनिहार तथा बनर्जी ने[1] एक रोचक संकलन सूत्र प्राप्त किया है। प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य उनके सूत्र को सरल विधि से हल करना है।

## Abstract

**A transformation formula for hypergeometric function.** *By* Vishakha Nagar and A. K. Rathie, Department of Mathematics, Dungar College, Bikaner (Rajasthan).

Recently Manihar and Banerjee[1] have obtained an interesting transformation formula for the hypergeometric functions. The aim of this paper is to derive their result in a very simple method.

## 1. मुख्य परिणाम

इस प्रपत्र में निम्नलिखित रूपान्तरण सूत्र को हल किया जायेगा[1]।

$$
{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, & -n+\frac{1}{2}; \\ & b+\frac{1}{2};\end{matrix}\ 1\right)
$$

$$
=2^n\, {}_2F_1\left(\begin{matrix}2n, b; \\ n+\frac{1}{2}\ b+\frac{1}{2};\end{matrix}\ \frac{1}{2}\right)\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{1}{2}n, & -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}; \\ & \frac{1}{2}b+\frac{1}{2};\end{matrix}\ 1\right)
$$

$$
{}_2F_1\left(\begin{matrix}-2n, b; \\ 2b;\end{matrix}\ 2\right) \tag{1.1}
$$

## 2. उपपत्ति

यदि (1.1) के दक्षिण-पक्ष को $I$ द्वारा सूचित करें तथा रैनविले[2] के निम्नलिखित सूत्र

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}; \\ b+\frac{1}{2};\end{matrix}\ 1\right)=2^n\frac{(b)_n}{(2b)_n} \tag{2.1}$$

जहाँ $Re(b)>0$ एवं $n$ एक अऋणात्मक पूर्णांक है।

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}2a, 2b; \\ a+b+\frac{1}{2};\end{matrix}\ \frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(a+b+\frac{1}{2})}{\Gamma(a+\frac{1}{2})\,\Gamma(b+\frac{1}{2})} \tag{2.2}$$

एवं

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}-2k, a; \\ 2a;\end{matrix}\ 2\right)=\frac{(\frac{1}{2})_k}{(a+\frac{1}{2})_k} \tag{2.3}$$

का प्रयोग करके सरल करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है—

$$I=\frac{\Gamma(b+\frac{1}{2})\,\Gamma(b+2n)}{\Gamma(b+n)\,\Gamma(b+n+\frac{1}{2})}$$

जो कि (1.1) का वाम-पक्ष ही है।

### निर्देश

1. मनिहार, जे० तथा बनर्जी, पी० के०, **गणित सन्देश**, 1991, 5, 37-38.

2. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, चेल्सिया पब्लि० कं० न्यूयार्क 1960.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 4, 1994

# धूल कण युक्त, असम्पीड्य श्यान द्रव का सरन्ध्र माध्यम में स्वतन्त्र सम्वहन द्रवगतिज प्रवाह

अजय कुमार सिंह, अतुल कुमार सिंह तथा नेत्र पाल सिंह
गणित विभाग, छदामीलाल जैन स्नातकोत्तर महाविद्यालय, फीरोजाबाद (उ० प्र०)

[ प्राप्त—अगस्त 8, 1994 ]

## सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में असम्पीड्य धूल कण युक्त श्यान द्रव का सरन्ध्र माध्यम में लम्बवत् अचर चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में स्वतन्त्र सम्वहन धारा रेखीय प्रवाह तथा मात्रा स्थानान्तरण का अध्ययन किया गया है। लाइट हिल[1] तथा साउन्डलगेकर[2] द्वारा प्रयुक्त विधियों का अनुगमन करते हुए द्रव-वेग, कण-वेग, ताप क्षेत्र, सान्द्रता क्षेत्र, त्वचा घर्षण तथा उष्मा प्रचुर प्रवाह ज्ञात किये गये हैं। इस शोध पत्र में वर्णित श्यान द्रव को धूल कण रहित मान लेने पर मुखर्जी आदि[3] द्वारा प्राप्त फल अविकल रूप में प्राप्त हो जाते हैं। प्राचलों को विभिन्न मान देकर प्राप्त फलों का तर्कपूर्ण विवेचन किया गया है।

## Abstract

**Magnetohydrodynamic free convective flow of a dusty viscous, incompressible liquid in porous medium.** *By* Ajay Kumar Singh, Atul Kumar Singh and Netra Pal Singh, Department of Mathematics, C. L. Jain (P. G.) College, Firozabad (U. P.)

Present research paper is the study of free convective laminar flow and mass transfer of a dusty viscous incompressible liquid through a porous medium in presence of uniform magnetic field. Following the techniques of Lighthill[1] and Soundelgekar[2] liquid velocity, particle velocity, temperature field, concentration field, skin friction and heat flux have been obtained. Assuming non-dusty liquid, the results of Mukherjee et al.[3] have been deduced from the present work. The results obtained have been discussed for various given values of the parameters.

## 1. विषय-प्रवेश

तरलों में उष्मीय ऊर्जा तथा रासायनिक वर्गों (chemical species) के रिसाव (diffusion) के कारण गुरुत्व बल तथा घनत्व के अन्तर की आन्तरिक क्रिया के फलस्वरूप जो बहाव पैदा होते हैं उन्हें स्वतन्त्र सम्वहन तथा मात्रा स्थानान्तरण बहाव कहते हैं। इस प्रकार के प्रवाहों का सरन्ध्र माध्यम में धूल कणों की उपस्थिति में अध्ययन तथा तकनीकी के अनेक क्षेत्रों में उपयोगी होने के कारण महत्वपूर्ण है। धूलकण युक्त द्रव प्रवाहों का तरल संतृप्त सरन्ध्र माध्यम में होकर स्वतन्त्र सम्वहन तथा मात्रा स्थानान्तरण के अध्ययन का भू-भौतिकी, ज्योतिष भौतिकी, उष्मागतिकी, रासायनिक अभियांत्रिकी तथा पेट्रोलियम उद्योग में महत्वपूर्ण अनुप्रयोग है। इसमें उष्मीय अवरोधन में आर्द्रता चालन, नमक झीलों से सरन्ध्र मृदा में जल सम्वहन प्रवाह, भूगर्भ जल में दूषित तरलों तथा निष्प्रयोजित द्रवों का स्थानान्तरण आदि उल्लेखनीय हैं। चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में इस प्रकार के प्रवाहों का अनुप्रयोग रासायनिक अभियांत्रिकी में छानने तथा शुद्धीकरण की प्रक्रिया में होता है। पेट्रोलियम उद्योग में प्राकृतिक गैस, तेल तथा जल के स्थानान्तर के अध्ययन में भी इस प्रकार के अध्ययन का विशेष महत्व है। इसके अलावा प्राकृतिक हवाओं द्वारा मृदा का जमाव, विस्फोट के समय बादलों में धूल कणों का प्रवेश तथा कागज तकनीकी में इस प्रकार के बहावों का अध्ययन अति महत्वपूर्ण है।

साफमान[4] ने धूल कण युक्त गैस के धारा रेखीय प्रवाह के स्थायित्व का अध्ययन किया। इनके द्वारा प्रतिपादित समीकरणों का प्रयोग करके अनेक शोधकर्त्ताओं[5–8] ने विभिन्न ज्यामितीय तथा सीमा दशाएँ लेकर धूल कण युक्त द्रवों के प्रवाह का अध्ययन किया है। रैप्टिस तथा साउन्डलगेकर[9] ने अपने तल में समान वेग से गति करती हुई एक ऊर्ध्वाधर सरन्ध्र प्लेट का चुम्बकीय द्रवगतिज बहाव मात्रा स्थानान्तर तथा समान उष्मा प्रचुर प्रवाह के साथ अध्ययन किया। हाल ही में मुखर्जी आदि[3] ने एक श्यान द्रव के स्वतन्त्र सम्वहन प्रवाह तथा स्थानान्तर का सरन्ध्र माध्यम में अचर चुम्बकीय क्षेत्र क उपस्थिति में अध्ययन किया है। प्रस्तुत शोधपत्र के द्रव को धूल कणरहित मान लेने पर मुखर्जी आदि[3] के फल स्वतः ही प्राप्त हो जाते हैं।

## 2. समस्या का गणितीय निरूपण

माना कि सरन्ध्र माध्यम में एक विद्युत संचालित, असम्पीड्य, धूलकण युक्त, श्यान द्रव एक सरन्ध्र प्लेट के सहारे धारा रेखीय प्रवाह में गमन कर रहा है। $x$-अक्ष को गुरुत्वाकर्षण के विपरीत दिशा में प्लेट के अनुदिश तथा $y$-अक्ष को प्लेट तथा $x$-अक्ष के लम्बवत् सरन्ध्र माध्यम की ओर माना गया है। चूँकि बहाव समतल प्लेट के अनुदिश है अतः द्रव तथा कण-वेग के घटक $y$ तथा $t$ के फलन हैं। इस शोध-पत्र का विश्लेषण निम्नलिखित मान्यताओं पर आधारित है :

(i) धूल कण ठोस, गोल, एकरूप, सूक्ष्म तथा विद्युत अ-संचालित हैं तथा बहाव क्षेत्र में समान रूप से वितरित हैं।

(ii) बहाव के पूर्ण अन्तराल में कणों के बीच ताप एकसमान है तथा कणों का संख्या घनत्व अचर है।

(iii) रासायनिक प्रतिक्रिया, मात्रा स्थानान्तर, कणों के बीच आन्तरिक क्रिया तथा कणों एवं द्रवों के बीच विकरण उपेक्षणीय है।

(iv) हाल प्रभाव तथा प्रेरित चुम्बकीय क्षेत्र को नगन्य माना गया है।

(v) अचर चुम्बकीय क्षेत्र बहाव के लम्बवत् लगाया गया है तथा चुम्बकीय रिनाल्ड्स अंक कम माना गया है।

(vi) प्लवल बलों (buoyancy forces) को नगन्य माना गया है तथा द्रव का बहाव पूर्णरूप से विकसित है।

उपर्युक्त मान्यताओं तथा ज्यामिति के अन्तर्गत साफमान[4] का अनुगमन करते हुए इस समस्या से सम्बन्धित आधारभूत समीकरण निम्नलिखित हैं।

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}-v_0\frac{\partial u}{\partial y}\right)=g\,\beta^*(C-C_\infty)+g\beta(T-T_\infty)+\frac{v}{k}\,(U-u)-\frac{\sigma}{\rho}B_0^2\,(U-u)$$

$$+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{KN_0}{\rho}\,(v-u) \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}-v_0\frac{\partial C}{\partial y}=D\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}-v_0\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{K^*}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{2.3}$$

तथा

$$m\frac{\partial V}{\partial t}=K(u-v) \tag{2.4}$$

जहाँ

$u$=$x$-अक्ष के अनुदिश द्रव वेग,

$v$=$x$-अक्ष के अनुदिश कण वेग,

$\beta$=तापीय प्रसार का घनफल गुणांक,

$C$=प्लेट पर वर्ग सान्द्रता (species concentration),

$C_\infty$=प्लेट से दूर वर्ग सान्द्रता,

$D$=आणविक फैलावकत्व (diffusivity),

$T$=प्लेट पर ताप,

$T_\infty$=प्लेट से दूर ताप,

$C_p$=नियत दाब पर विशिष्ट उष्मा,

$v_0$=स्थिर चूषण वेग,

$q$=प्रति इकाई अचर उष्मा प्रवाह (heat flux),

$\beta^*$=सान्द्रता सहित प्रसार का घनफल गुणांक,

$\nu$=गतिज (kinematic) श्यानता गुणांक

तथा $g$=गुरुत्व के कारण त्वरण।

समस्या की सीमा-दशाएँ निम्नलिखित हैं।

$$\left.\begin{aligned} &u=v=0,\quad \frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{q}{k},\ C=C_n\,(1+\epsilon\, e^{-nt})\ y=0 \text{ पर} \\ &u=v=U,\ T\to T_\infty,\ C\to C_\infty \qquad \text{ज्यों-ज्यों } y\to\infty \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

हम निम्नलिखित अ-विमीय चरों को प्रविष्ट कर रहे हैं।

$$u^*=\frac{u}{U},\quad v^*=\frac{v}{U},\quad y^*=\frac{y\, v_0}{\nu},\quad t^*=\frac{v^2_0\, t}{\nu},\quad n^*=\frac{n\nu}{v^2_0}$$

$$K^*=\frac{K\, v^2_0}{\nu},\quad C^*=\frac{C-C_\infty}{C_n-C_\infty} \text{ तथा } T^*=\frac{g\,\beta(T-T_\infty)}{g\nu}$$

उपर्युक्त अ-विमीय चरों का प्रयोग कर, तारांकनों को उपेक्षित करके समीकरण (2.1) से (2.4) तक निम्नलिखित रूप में लिखे जा सकते हैं।

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial y}=G_m\, C+G_r\, T+\left(M^2+\frac{1}{k}\right)(1-u) + \frac{l}{\tau}(v+u)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{1}{S_c}\ \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+P_r\frac{\partial T}{\partial y}=P_r\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.8}$$

तथा

$$\tau\frac{\partial v}{\partial t}=u-v \tag{2.9}$$

जहाँ $S_c=\frac{\nu}{D}$(स्कीमिट अंक),

$$P_r=\frac{\mu c_p}{K^*}$$ (प्रेन्डिल अंक),

$$G_r=\frac{g \beta q v^2}{v^3_0 U k}$$ (ग्रासहॉफ अंक),

$$M=\sqrt{\left(\frac{\sigma v}{\rho}\right)} \frac{B_0}{v_0}$$ (हार्टमान अंक),

$$G_m=\frac{g \beta^* v (C_n-C_\infty)}{v^2_0 U}$$ (परिवर्तित ग्रासहॉफ अंक),

$$l=\frac{m N_0}{\rho}$$ (धूल कणों की मात्रा सान्द्रता)

तथा

$$\tau=\frac{m v^2_0}{v K}$$ (धूल कणों का काल शिथिलता प्राचल)

अ-विमीय सीमा दशाएँ निम्नलिखित हैं :

$$\left.\begin{array}{l} u=v=0, \quad \frac{\partial T}{\partial y}=-1, C=1=\epsilon \frac{C_n \exp(-nt)}{C_n-C_\infty} y=0 \text{ पर} \\ n=v=0, \quad T\to 0, \quad C\to 0 \quad \text{ज्यों-ज्यों } y\to\infty \end{array}\right\} \quad (2.10)$$

### 3. समस्या का हल

लाइटहिल[1] का अनुगमन करते हुए $\epsilon$ को अतिरिक्त सूक्ष्म सन्निकट प्राचल (perturbation parameter) $u$, $v$, $T$ तथा $C$ को निम्नलिखित रूपों में मान लिया ।

$$u=u_0+\epsilon u_1 \exp(-nt) \quad (3.1)$$

$$v=v_0+\epsilon v_1 \exp(-nt) \quad (3.2)$$

$$T=T_0+\epsilon T_1 \exp(-nt) \quad (3.3)$$

तथा

$$C=C_0+\epsilon C_1 \exp(-nt) \quad (3.4)$$

(3.1) से (3.4) का प्रयोग समीकरण (2.7), (2.8) तथा (2.9) में करने पर

$$C''_0+S_c C'_0=0 \quad (3.5)$$

$$C''_1+S_c C'_1+n S_c C_1=0 \quad (3.6)$$

$$T''_0+P_r T'_0=0 \quad (3.7)$$

$$T''_1+P_r\, T'_1+n\, P_r\, T_1=O \tag{3.8}$$

$$u_0-v_0=O \tag{3.9}$$

तथा

$$v_1=\frac{u_1}{(1-\tau_n)} \tag{3.10}$$

पुन: (3.9), (3.10) तथा (3.1)–(3.4) का प्रयोग कर समीकरण (2,6) से हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं।

$$u''_0+u'_0-\left(M^2+\frac{1}{k}\right)u_0=-G_r\, T_0-G_m\, C_0-\left(M^2+\frac{1}{k}\right) \tag{3.11}$$

तथा

$$u''_1+u'_1-\left(M^2+\frac{1}{k}-n-\frac{ln}{1-\tau n}\right)u_1=-G_m\, C_1-G_r\, T_1 \tag{3.22}$$

रूपान्तरित सीमा दशाएँ निम्नलिखित हैं :

$$u_0=v_0=0,\ u_1=v_1=0,\ C_D=1,\ C_1=\frac{C_n}{C_n-C_\infty},$$

$$T_0=-1,\ T_1=0 \qquad y=0 \text{ पर} \tag{3.13a}$$

$$u_0=v_0=1,\ u_1=v_1=0,\ C_0\to 0,\ C_1\to 0,$$

$$T_0\to 0,\ T_1\to 0 \qquad \text{ज्यों-ज्यों } y\to\infty \tag{3.13b}$$

सीमा दशाओं (3.13a) तथा (3.13b) का प्रयोग करने से (3.5) से (3.8) तक को हल करने के बाद $C_0$, $C_1$, $T_0$, $T_1$ ज्ञात करके (3.11), (3.12) से $u_0$ तथा $u_1$ का मान उपर्युक्त सीमा दशाओं से ज्ञात करके (3.1) से (3.4) तक का प्रयोग कर हमें $u$, $v$, $T$ तथा $C$ के निम्नलिखित मान प्राप्त होते हैं।

$$u=1+(H_1+H_2-1)\exp(-L_4y)-H_1\exp(-P_ry)-H_2\exp(-S_cy)$$
$$+\epsilon\, H_3[\exp(-L_2y)-\exp(-L_6y)]\exp(-nt) \tag{3.14}$$

$$v=1+(H_2+H_1-1)\exp(-L_4y)-H_1\exp(-P_ry)-H_2\exp(-S_cy)$$
$$+\epsilon\, H_4[\exp(-L_2y)-\exp(-L_6y)]\exp(-nt) \tag{3.15}$$

$$C=\exp(-S_cy)+\epsilon\,\frac{C_n}{C_n-C_\infty}\exp(-L_2y+nt) \tag{3.16}$$

$$T=\frac{1}{P_r}\exp(-P_ry) \tag{3.17}$$

जहाँ

$$H_1=\frac{G_r}{P_r\,[P^2{}_r-P_r-M^2-1/k]},$$

$$H_2=\frac{G_m}{S^2{}_c-S_c-M^2-1/k},$$

$$H_3=\frac{C_n\,G_m}{(C_n-C_\infty)\,[L^2{}_2-L_2-(M^2+1/k-n-l_n/1-\tau_n)]},$$

$$H_4=\frac{H_3}{1-\tau_n}$$

$$2\,L_2=S_c+(S^2{}_c-4n\,S_c)^{1/2},\quad 2\,L_4=1+[1+4\,(M^2+1/k)]^{1/2},$$

तथा

$$2\,L_6=1+\left[1+4\left(M^2+\frac{1}{k}-n-\frac{l_n}{1-\tau_n}\right)\right]^{1/2}$$

**4. त्वचा घर्षण, उष्मा तथा मात्रा स्थानान्तरण**

माना कि द्रव तथा धूल कणों का प्लेट पर त्वचा घर्षण क्रमशः $\tau_1$ तथा $\tau_2$ हैं। अतः

$$\tau_1=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=H_5-\epsilon\,H_6\exp(-nt) \tag{4.1}$$

तथा

$$\tau_2=\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=0}=H_5-\epsilon\,H_7\exp(-nt) \tag{4.2}$$

जहाँ

$$H_5=H_1\,P_r+H_2\,S_c-P_r\,(H_1+H_2),$$

$$H_6=H_3\,(L_2+L_6)$$

तथा

$$H_7=H_4\,(L_2+L_6)$$

उष्मा स्थानान्तरण दर नसैल्ट अंक ($Nu$) के पदों में निम्नलिखित है।

$$N_u=-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}=1$$

मात्रा स्थानान्तरण दर ($C_M$) का मान निम्नलिखित है—

$$C_M=S_c+\epsilon H_8\exp(-nt)$$

जहाँ

$$H_8=\frac{C_n\,L_2}{C_n-C_\infty}$$

## परिणाम तथा विवेचना

(i) (3.14) तथा (3.15) से स्पष्ट है कि द्रव वेग और कण वेग $y$ तथा $t$ के मान बढ़ने पर कम होते जाते हैं और अन्त में दोनों वेग स्थिर तथा बराबर हो जाते हैं।

(ii) सम्बन्ध (3.16) यह इंगित करता है कि ज्यों-ज्यों $y$ तथा $t$ दोनों के मान बढ़ते हैं $C$ का मान घटता है और अन्त में शून्य हो जाता है।

(iii) सम्बन्ध (3.17) से स्पष्ट है कि ताप का मान $y$ के बढ़ने पर घटता है। $y$ के अधिक बढ़ने पर यह शून्य की ओर तेजी से चलता है और अन्त में शून्य हो जाता है।

(iv) यदि श्यान द्रव को धूल कण रहित मान लिया जाय अर्थात् यदि $K=0$ तथा $n=-iw$ मान लें तो मुखर्जी आदि[3] द्वारा प्राप्त परिणाम ठीक उसी रूप में प्राप्त हो जाते हैं।

### निर्देश


1. लाइटहिल, एम० जे०, **प्रोसी० अमे० सोसा०**, 1954, **22(A)**, 1-23
2. साउन्डलगेकर, वी० एम०, **केमि० इन्जी० साइं०**, 1971, **26**, 2043-2050
3. मुखर्जी, एस०, मुखर्जी, एस० तथा मंडल, जी० सी०, **इन्डि० जर्न० थ्योर० फिजि०**, 1991, **39(2)**, 133-138
4. साफमान, पी० जे०, **जर० फ्लू० मिके०**, 1962, **13**, 120-128
5. राव, पी० एस० एस०, **डिफें० साइं० जर्न०**, 1969, **19**, 135-138
6. वर्मा, पी० डी० तथा माथुर, ए० के०, **इन्डि० जर्न० थ्योर एप्ला० मैथ०**, 1973, **4(2)**, 133-138
7. मित्रा, पी०, **जर्न० मैथ० फिजी० साइं०**, 1979, **13(4)**, 385-394
8. सिसौदिया, एस० एस० तथा गुप्ता, एम०, **इन्डि० जर्न० थ्योर० फिजि०**, 1983, **31(4)**, 180-189
9. रैप्टिस, ए० ए० तथा साउन्डलगेकर, वी० एम०, **जैड० ए० एम० एम०**, (Z A M M) 1984, **64**, 127-130

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 4, 1994

# अवमल उपचारित मृदा में फास्फोरस युक्त उर्वरक की उपस्थिति में धनिया द्वारा भारी धातुओं का उद्ग्रहण

शिवगोपाल मिश्र, सुनील कुमार पाण्डेय तथा दिनेश मणि
शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान
इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[ प्राप्त—जून 1, 1994 ]

## सारांश

फास्फोरस युक्त उर्वरक (सिंगल सुपरफॉस्फेट) की उपस्थिति में अवमल की विभिन्न मात्राओं के प्रयोगोपरान्त धनिया द्वारा भारी धातुओं (Cr, Cu, Pb और Zn) के उद्ग्रहण ज्ञात करने के उद्देश्य से शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र पर प्रयोग किया गया। अवमल की दो मात्राएँ क्रमश: 5 तथा 10 टन प्रति हेक्टेयर ऐवं सिंगल सुपरफॉस्फेट की क्रमश: 190 तथा 250 किग्रा० प्रति हेक्टेयर की दर से दो मात्राएँ डाली गयीं। प्रयोगोपरान्त यह पाया गया कि धनिया द्वारा इन भारी धातुओं का उद्ग्रहण अवमल की बढ़ती मात्रा के अनुसार बढ़ता है किन्तु सिंगल सुपरफॉस्फेट की मात्रा में वृद्धि से भारी धातुओं के उद्ग्रहण में क्रमश: कमी आती है।

## Abstract

**Uptake of heavy metals by Coriander crop in presence of phosphatic fertilizer in a sludge treated soil.** By S. G. Misra, Sunil Kumar Pandey and Dinesh Mani, Sheila Dhar Institute of Soil Science, University of Allahabad, Allahabad.

A field experiment was conducted at Sheila Dhar Institute experimental farm in order to find out the uptake of four heavy metals—Cr, Cu, Pb and Zn by Coriander crop in presence of single superphosphate in sludge treated soil. Two doses of sludge (5 and 10 t/ha) were applied. Single superphosphate was added @ 190 and 250 kg/ha.

It was observed that the uptake of all the four heavy metals increases as the dose of sludge increases. However, the uptake of these heavy metals decreased with increasing doses of single superphosphate added along with sludge.

अब तक हुए शोधों से यह भली भाँति ज्ञात हो चुका है कि वाहित मल जल तथा अवमल में नाइट्रोजन तथा फॉस्फोरस के अतिरिक्त कुछ भारी धातुएँ भी पायी जाती हैं, जो मिट्टी में एकत्रित होने पर मृदा के धात्विक प्रदूषण का कारण बनती हैं। साथ ही पौधों द्वारा इनके उद्ग्रहीत किये जाने से उनकी वृद्धि तथा उपज पर बुरा प्रभाव डालती हैं[1]। खाद्य शृंखला के माध्यम से कुछ भारी धातुएँ कुछ जन्तुओं एवं स्वयं मनुष्य के लिए घातक सिद्ध हो सकती हैं। औद्योगिक संस्कारण तथा उपभोक्ता सामग्री के निर्माण के दौरान बहुत सी भारी धातुएँ वृहद रूप से प्रयुक्त होती हैं[2]। औद्योगिक वाहित जल के अतिरिक्त घरेलू वाहित जल में भी इन भारी धातुओं की कुछ मात्रा विद्यमान हो सकती है[3]। मिश्र तथा तिवारी[4] ने चार फसलों (ज्वार, पालक, चौलाई और तिल) में अवमल उपचार के पश्चात् यह पाया कि ज्वार और तिल पर अवमल का हानिकारक प्रभाव सबसे कम पड़ता है। तत्पश्चात् पालक का स्थान है। भारी धातुओं द्वारा संदूषण की दृष्टि से तिल को सबसे सुरक्षित पाया गया।

अवमल में उपस्थित भारी धातुओं का धनिया की फसल द्वारा उद्ग्रहण का पता लगाने के उद्देश्य से प्रस्तुत अध्ययन की रूप-रेखा बनायी गयी।

## प्रयोगात्मक

1×1 मी० के 27 प्लाटों में यादृच्छिक विधि द्वारा अवमल की दो मात्राएँ (5 तथा 10 टन प्रति हेक्टेयर), सिंगल सुपर फास्फेट की भी दो मात्राएँ (190 तथा 250 किग्रा० प्रति हेक्टेयर) एक-साथ तथा अलग-अलग प्रयोग की गयीं। धनिया प्रायोगिक फसल के रूप में उगायी गयी। कुल 8 सिंचाइयाँ, नल के जल द्वारा की गयीं।

प्रस्तुत अध्ययन में प्रयुक्त अवमल शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रक्षेत्र के सामने बह रहे नाले से एकत्रित करके प्रयोग किया गया। अवमल को सुखाकर, पीसकर तथा छानकर इसका विश्लेषण किया गया। प्राप्त परिणाम सारणी-1 में दिये गये हैं।

सारणी 1

अवमल का विश्लेषण

| कार्बनिक पदार्थ | भारी धातुएँ (अंश प्रतिदश लक्षांश) | | | |
|---|---|---|---|---|
| (प्रतिशत में) | क्रोमियम | कॉपर | लेड | जिंक |
| 2.85 | 17.8 | 25.4 | 34.0 | 185.0 |

अवमल तथा सिंगल सुपरफॉस्फेट के प्रयोग से धनिया द्वारा भारी धातुओं के उद्ग्रहण से सम्बन्धित परिणाम सारणी-2 में दिये गये हैं। धनिया द्वारा उद्ग्रहीत भारी धातुओं की मात्रा त्रिअम्ल निष्कर्ष बनाकर एटामिक ऐब्जार्पसन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर (AAS) द्वारा ज्ञात की गयी।

## परिणाम तथा विवेचना

धनिया की फसल द्वारा विभिन्न उपचारों के अन्तर्गत भारी धातुओं के उद्ग्रहण से सम्बन्धित परिणाम सारणी-2 में दिये गये हैं।

सारणी 2

विभिन्न उपचारों के अन्तर्गत धनिया द्वारा भारी धातुओं का उद्ग्रहण

| उपचार/वर्गमीटर | भारी धातुएँ (अंश प्रति दश लक्षांश) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | क्रोमियम | कॉपर | लेड | जिक |
| नियन्त्रण | 0.2 | 0.33 | 6.68 | 10.00 |
| 0.5 किग्रा० अवमल | 0.3 | 0.40 | 10.69 | 15.00 |
| 1 किग्रा० अवमल | 0.4 | 0.72 | 16.76 | 18.00 |
| 19 ग्राम सिं० सु० फा० | 0.2 | 0.32 | 6.60 | 12.00 |
| 25 ग्राम सिं० सु० फा० | 0.1 | 0.32 | 4.57 | 13.00 |
| 0.5 किग्रा० अवमल + | 0.2 | 0.33 | 7.70 | 14.00 |
| 19 ग्राम सिं० सु० फा० + 0.5 किग्रा० अवमल | 0.2 | 0.25 | 6.61 | 13.00 |
| 25 ग्राम सिं० सु० फा० + 1 किग्रा० अवमल+ 19 ग्राम सिं० सु० फा० | 0.3 | 0.47 | 8.64 | 15.0 |
| 1 किग्रा० अवमल + 25 ग्राम सिं० सु० फा० | 0.2 | 0.35 | 7.62 | 11.00 |

सिं० सु० फा०=सिंगल सुपरफॉस्फेट

सारणी-2 से स्पष्ट है कि जिन तत्वों की मात्रा अवमल में अधिक है, उन तत्वों का अवशोषण भी अधिक होता है। इसके विपरीत जिन तत्वों की मात्रा अवमल में कम है उनका अवशोषण भी कम होता है। सारणी के अध्ययन से यह भी ज्ञात होता है कि अवमल की मात्रा बढ़ने के साथ धातुओं का अवशोषण भी अधिक होता है, परन्तु अवमल के साथ फॉस्फेट की बढ़ती मात्रा से अवशोषण क्रमशः कम होता जाता है।

स्पष्ट है कि अवमल के साथ सिंगल सुपरफॉस्फेट का प्रयोग करके धनिया की फसल में धात्विक संदूषण को कम किया जा सकता है।

## निर्देश

1. मिश्र, एस० जी० तथा दिनेश मणि, **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका**, 1991, **34**, 83-90.

2. इस्कान्दार, आई० के०, Proc. Int. Cong. on heavy metals in environment. University of Toronto, Canada 1975, 417-432.

3. क्लीन, एल० ए०, एम० नैशा, एन० तथा क्रिश्चर, एस० एल० J. Water Polluto Cont. Fed. 1974, 46, 1563-1662.

4. मिश्र, एस० जी० तथा तिवारी, एस० डी०, **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका**, 1992, **35**, 105-109

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 4, 1994

# $\{\phi^*_n(x, y, z)\}^\infty_0$ बहुपदों का उपगामी आचरण

रामजी सिंह
स्नातकोत्तर गणित विभाग, महाराज कालेज, आरा (बिहार)

तथा

राजेश कुमार तिवारी
डी० एन० कालेज, मौशौरी (पटना), बिहार

[ प्राप्त—जुलाई 16, 1994 ]

## साराश

यह प्रपत्र । $\{\phi_n^*(x, y, z)\}^\infty_0$ बहुपदों के सम्बन्ध में है जब $n \to 0$ । कुछ परिणामों को प्रमेयों तथा उपप्रमेयों के रूप में प्राप्त किया गया है और बहुपद के घात $n$ को $\infty$ तक बढ़ाया गया है। प्रमेयों तथा उपप्रमेयों से कुछ रोचक परिणाम प्राप्त किये गये हैं।

## Abstract

**Asymptotic behaviour of the polynomials** $\{\phi^*_n(x, y, z)\}^\infty_0$. *By* Ramji Singh, P. G. Department of Mathematics, Maharaja College, Arrah (Bihar) and Rajesh Kumar Tiwary, D. N. College, Maushauri (Patana), Bihar.

This paper deals with the asymptotic representation of the polynomials $\{\phi^*_n(x, y, z)\}$ when $n \to \infty$. Some results have been obtained in the form of theorems and corollaries and order of the polynomial $n$ has been increased to $\infty$. Some interesting results have been deduced from the theorems and corollaries.

## 1. प्रस्तावना

हम सार्वीकृत बहुपद सेट $\{\phi^*_n(x, y, z)\}$ को $H$-फलन वाले जनक सम्बन्ध के द्वारा, जो फाक्स[4,8] के फलस्वरूप है निम्नलिखित रूप में परिभाषित करेंगे—

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi \begin{matrix} * \, a_1; a_2; a_3; \left(a_j: A_j^{(i)}\right); b_1; b_2; b_3; \left(b_j;\ B_{q+1}^{(i)}\right); c_1; c_2; c_3; c_4 \\ n: (n^{(i)}); N; P: (p^{(i)}), q^{(i)}); \left(d_{p^{(i)}}^{(i)}, D_{p^{(i)}}^{(i)}\right);\ \left\{\left(e_o^{(i)}, E_o^{(i)}\right), \left(e_q^{(i)}, E_q^{(i)}\right)\right\} \end{matrix} (x, y, z)\, t^n$$

$$= F(x, y, z, t)\ e^{c_1\, xyzt^{c_4}}\ H^{1, \bar{N}; (1, n^{(i)})}_{P, q+1; [p^{(i)}, q^{(i)}+1]}$$

$$\left[ -a_1\, x^{b_1}\, t^{E'_0},\ -a_2\, y^{b_2}\, t^{c_2},\ -a_3\, z^{b_3}\, t^{c_3} \Bigg/ \begin{matrix} \left\{\left(a_j;\ A_p^{(i)}\right)\right\} : \\ \left\{\left(b_j;\ B_{q+1}^{(i)}\right)\right\} : \end{matrix} \begin{matrix} \left(d_{p^{(i)}}^{(i)}, D_{p^{(i)}}^{(i)}\right) \\ \left\{\left(e_o^{(i)}, E_o^{(i)}\right), \left(e_{q^{(i)}}^{(i)}, E_{q^{(i)}}^{(i)}\right)\right\} \end{matrix} \right] \tag{1.1}$$

जहाँ

$$|\arg a_1\, x^{b_1}\, t^{E'_0}| < \tfrac{1}{2} R_1,\ |\arg a_2\, x^{b_2}\, t^{c_2}| < \tfrac{1}{2} R_2$$

तथा

$$|\arg a_3\, z^{b_3}\, t^{c_3}| < \tfrac{1}{2} R_3;\ R_1 > 0$$

$$R_i = \sum_{j=1}^{N} A_j^{(i)} - \sum_{j=N+1}^{p} A_j^{(i)} - \sum_{j=+1}^{q} B_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{l} B_j^{(i)} + E_o^{(i)}$$

$$- \sum_{j=1}^{q^{(i)}} E_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{n^{(i)}} D_j^{(i)} - \sum_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}} D_j^{(i)};\ (i=1, 2, 3)$$

तथा

$$F(x, y, z, t) = \frac{\prod_{i=1}^{3} E_o^{(i)} \prod_{j=N+1}^{P} \Gamma\left(a_j - \frac{A'_j}{E'_o} e'_o - \frac{A''_j}{E''_o} e''_o - \frac{A''_j}{E''_o} e''_o\right)}{\prod_{j=1}^{N} \left(1 - a_j + \frac{A'_j}{E'_o} e'_o + \frac{A''_j}{E''_o} e''_o + \frac{A''_j}{E''_o}\right)}$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{q} \Gamma\left(1-b_j+\frac{B'_j}{E'_o}e'_o+\frac{B''_j}{E'_o}e''_o+\frac{B''_j}{E''_o}e''_o\right)\prod_{j=u'_1+1}^{p'}\Gamma\left(d'_j-\frac{D'_j}{E'_o}e'_o\right)}{\prod_{j=1}^{u'_1}\Gamma\left(1-d'_j+\frac{D'_j}{E'_o}e'_j\right)\prod_{j=1}^{u''}\Gamma\left(1-D''_j+\frac{D''_j}{E''_o}e''_j\right)\prod_{j=1}^{u''}\Gamma\left(1-d''_j+\frac{D''_j}{E''_o}e''_j\right)}$$

$$\prod_{j=u''_1+1}^{p''}\Gamma\left(d''_j-\frac{D''_j}{E''_o}e''_o\right)\prod_{j=u'''_1+1}^{p'''}\Gamma\left(d'''_j-\frac{D'''_j}{E'''_o}e'''_o\right)$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{q'}\Gamma\left(\left(1-e'_j\right)+\frac{E'_o}{E'_o}e'_o\right)}{(a_1)^{(e_0/E_0)^{r_1}}\; x^{b_1(e'_0/E'_0)}\; y^{b_2(e''_0/E''_0)}\; z^{b_3(e''_0/E''_0)}}$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{q''}\Gamma\left(1-e''_j+\frac{E''_j}{E''_o}e''_o\right)\prod_{j=1}^{q'''}\Gamma\left(1-e'''_j+\frac{E'''_j}{E'''_o}e'''_o\right)}{t\left\{e'_o+c_2\frac{e''_o}{E''_o}+c_3\frac{e'''_o}{E'''_o}\right\}}$$

घात है और $a_1$, $a_2$, $a_3$ इत्यादि प्राचल हैं ।

(1.1) में परिभाषित सार्वीकृत बहुपद सेट प्रदान करता है—

$$\phi^*_n(x, y, z) = \frac{[(Q_1(i, j))]_n\,[(Q_{10}(i, j))]_n\,[1-(Q_{11}(i, j))]_n\,[1-(Q_4(i, j)}{[(Q_{12}(i, j))]_n\,[(Q_7(i, j))]_n}$$

$$\frac{(E_1\, x^{b_1/E'_0})^n}{n!}\sum_{u=0}^{[n/e_1]}\sum_{v=0}^{[n/e_2]}\sum_{w=0}^{[n/c_4]}\frac{\Delta_u[e_1;\,-n]\,\Delta^3_u[e_\cdot;\,1-(Q_1(i,j))-n}{u!\,v!\,w!\,\Delta^1_u[e_1;\,1-(Q_1(i,j))-n]}$$

$$\times\frac{\Delta^4_u[e_6;\,1-(Q_{12}(i,j))-n+e_5v]\,[(Q_\cdot(i,j))]_u\,[1-(Q_5(i,j))]_u}{\Delta^2_u[e_4;\,1-(Q_{10}(i,j))-n+e_3v]\,\Delta^\circ_u[e_4;\,(Q_{11}(i,j))-n+e_3v]}$$

$$\times \frac{\triangle_v[e_2; -n+e_1 u]\ \triangle^3{}_v[e_2; 1-(Q_7(i,j))-n+e_1u]}{\triangle^6{}_u[e_1;(Q_4(i,j))]\ [(Q_8(i,j))]_u\ \triangle^1{}_v[e_2; 1-(Q_1(i,j))-n+e_1u]}$$

$$\times \frac{\triangle^4{}_v[e_5; 1-(Q_{12}(i,j))-n]\ [(Q_3(i,j))]_v\ [1-(Q_6(i,j))]_v}{\triangle^2{}_v[e_3; 1-(Q_{10}(i,j))-n]\ \triangle^5{}_v[e_3; (Q_{11}(i,j))-n]\ \triangle^6{}_v[e_2;(Q_4(i,j))-n+e_1u]}$$

$$\times \frac{\triangle_w[e_4; -n+e_1u+e_2v]\ \triangle^3{}_w[c_4; 1-(Q_7(i,j))-n+e_1u+e_2v]}{[Q_9(i,j))]_v\ \triangle c_4; 1-(Q_1(i,j))-n+e_1u+e_{2v}]}$$

$$\triangle^4{}_w[c_4; 1-(Q_{12}(i,j))-n+e_5v+e_6u)]$$

$$\times \frac{(-e_1)^{e_1u(1+\sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0-\sum_{j=1}^{p'} p'j/E'_0)}}{\triangle^2{}_w[c_4; 1-(Q_{10}(i,j))-n+e_3v+e_4u]\ \triangle^5{}_w[c_4; (Q_{11}(i,j))-n+e_3v+e_4u]}$$

$$\times \frac{(-e_2)^{e_2v(1+\sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0-\sum_{j=1}^{p'} D'j/E'_0)}\ (-e_5)^{e_5v\sum_{j=1}^{q} B'j/E'_0}}{\triangle^6{}_w[c_4: (Q_4(i,j))-n+e_1u+e_2v]\ \ (-e_4)^{e_4u\sum_{j=1}^{p} A'j/E'_0}}$$

$$\times \frac{(-c_4)^{c_4w(1+\sum_{j=1}^{q} B'j/E'_0+\sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0)-\sum_{j=1}^{p'} D'j/E'_0-\sum_{j=1}^{p} A'j/E'_0)}}{(-e_3)^{e_3v\sum_{j=1}^{p} A'j/E'_0}(E_1{}^{e_1}\ x^{b_1(e_1/E'_0)})^n\ (E_1{}^{e_2}\ x^{b_1(e_2/E'_0)})^v}$$

$$\times \frac{(E_2\ y^{b_2/E''_0})^u\ (E_3{}^{(b_3(1/E''_0)})^v\ (c_1z)^w}{(E_1{}^{c_4}\ x^{b_1(c_4/E'_1)})^w} \tag{1.2}$$

## 2. प्रमुख परिणाम

**प्रमेय 1**

$$p''=q''=p'''=q'''=n''=n'''=0$$

के लिए (1.2) से हमें प्राप्त होता है—

$$\lim_{n\to\infty}\ \left\{\frac{1}{R}\ X\ \phi_n^*\ (1, n^{-E''_0/b_2}\ \left\{e_1 p''+e_6\ (\sum_{j=1}^{q} B'j/E'_0)\right.\right.$$

$$\left.+e_4\ (\sum_{j=1}^{p} A'j/E'_0)\ y,\ n^{-c_4(P'-Q')}\ z)\right\}$$

$$=\exp\left(\frac{(E_2\, y^{b_2/E''_0}\,(-e_1)^{e_1 \sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0)}}{(E_1^{e_1})}\right)\exp\left(\frac{c_1 z}{c_1^{c_4}}\right) \tag{2.1}$$

जहाँ

$$P'=1+\sum_{j=1}^{q'} B'j/E'_0+\sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0,\quad Q'=\sum_{j=1}^{p'} D'j/E'_0+\sum_{j=1}^{p} A'j/E'_0$$

$$p''=1+\sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0-\sum_{j=1}^{p'} D'j/E'_0$$

उपपत्ति : (2.1) के वामपक्ष को $B_1$ से द्योतित करें तो

$$B_1=\lim_{n\to\infty}\left\{R\sum_{u=0}^{[n/e_1]}\sum_{v=0}^{[n/e_2]}\sum_{w=0}^{[n/c_4]}\frac{\Delta_u\, e_1;\, -n\ \Delta_u\,[e_1;\, 1-(Q_7(i,j))-n]}{u!\, v!\, w!\ \angle^1_u\,[e_1;\, 1-(Q_1(i,j))-n]}\right.$$

$$\times\frac{\Delta^4_u\,[e_6;\, 1-(Q_{12}(i,j))-n+e_5v]\ \Delta_v[e_2;\, -n+e_1u]\ \Delta^3_v[e_2;\, 1-(Q_7(i,j))-n+e_1u]}{\Delta^2_u[e_4;\, 1-Q_{10}(i,j))-n+e_3v]\ \Delta^5_u[e_4;\, (Q_{11}(i,j))-n+e_3v]}$$

$$\times\frac{1}{\Delta^6_u[e_1;\, (Q_4(i,j))-n]\ \Delta_u[e_4;\, 1-(Q_{10}(i,j))-n+e_3v]\ \ \Delta^5_u[e_4;\, (Q_{11}(i,j))-n+e_3v]}$$

$$\times\frac{\Delta^4_v[e_5;\, 1-(Q_{12}(i,j))-n]\ \Delta_w[c_4;\, -n+e_1u+e_2v]}{\Delta^6_u[e_1;\, (Q_4(i,j))-n]\ \Delta^1_v[e_2;\, 1-(Q_1(i,j))-n+e_1u]\ \Delta^2_v[e_3;\, 1-(Q_{10}(i,j))-n]}$$

$$\times\frac{\Delta^3_u[c_4;\, 1-(Q_7(i,j))-n+e_1u+e_2v]\ \Delta^4_w[c_4;\, 1-(Q_{12}(i,j))-n+e_5v+e_6u]}{\Delta^5_v[e_3;\, (Q_{11}(i,j))-n]\ \Delta^6_v[e_2;\, (Q_4(i,j))-n+e_1u]}$$

$$\times\frac{(-e_1)^{e_1np''}\ (-c_4)^{c_4w(P'-Q')}\ (L)^v\ (L_1)^n}{\Delta^1_w[c_4;\, 1-(Q_{11}(i,j))-n+e_1u+e_2v]\ \Delta^2_w\,[c_4;\, 1-(Q_{10}(i,j))-n+e_3v+e_4u]}$$

$$\times\frac{(-e_2)^{e_2vp''}\ (c_1z)^w}{\Delta^5_w[c_4;\, (Q_{11}(\bar{i},j))-n+e_3v+e_4u]\ \Delta^6_w[c_4;\, (Q_4(i,j))-n+e_1u+e_2v]\ (E_1^{c_4}\, x^{b_1(c_4/E'_0)})^w}$$

परिणाम $\Delta_v[m;\, -n]\simeq(-n/m)^{mv}$ का प्रयोग करने पर तथा अन्यों के लिए ऐसे ही परिणामों का प्रयोग करने पर

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{R\sum_{u=0}^{[n/e_1]}\sum_{v=0}^{[n/e_2]}\sum_{w=0}^{[n/c_4]}\left(-\frac{n}{e_1}\right)^{e_1n}\left(-\frac{n}{e_1}\right)^{e_2u\sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0}\right.$$

$$\times \frac{\left(-\frac{n}{e_6}\right)^{e_6 u \sum_{j=1}^{q} B'j/E'_0} \left(-\frac{n}{e_2}\right)^{e_2 v} \left(-\frac{n}{e_2}\right)^{e_2 v \sum_{j=1}^{q'} B'j/E'_0}}{\left(-\frac{n}{e_4}\right)^{e_4 u \sum_{j=N+1}^{p} A'j/E'_0} \left(-\frac{n}{e_1}\right)^{e_1 u \sum_{j=N'+1}^{p'} Dj'/E'_0} \left(-\frac{n}{e_2}\right)^{e_2 v \sum_{j=1}^{n'} D'j/E'_0}}$$

$$\times \frac{\left(-\frac{n}{e_5}\right)^{e_5 v \sum_{j=1}^{q} B'j/E'_0} \left(-\frac{n}{c_4}\right)^{c_4 w} \left(\frac{n}{c_4}\right)^{c_4 w \sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0}}{\left(-\frac{n}{e_3}\right)^{e_3 v \sum_{j=n+1}^{p} A'j/E'_0} \left(-\frac{n}{e_2}\right)^{e_2 v \sum_{j=n'+1}^{p'} D'j/E'}}$$

$$\times \frac{(-e_1)^{e_1 u(1+\sum_{j=1}^{q'} E'j|E'_0 - \sum_{j=1}^{p'} D'j/E'_0} (-e_6)^{e_6 u \sum_{j=1}^{q} B'j/E'_0}}{\left(-\frac{n}{c_4}\right)^{c_4 w \sum_{j=1}^{n'} D'j/E'_0} \left(-\frac{n}{c_4}\right)^{c_4 w \sum_{j=1}^{N} A'j/E'_0} \left(-\frac{n}{c_4}\right)^{c_4 w \sum_{j=n+1}^{p} A'j/E'_0}}$$

$$(E_2\, y^{b_2/E''_0})^{\mu}\, (-e_2)^{e_2 v(1+\sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_9 - \sum_{j=1}^{p'} D'j/E'_0}$$

$$\times \frac{(-e_5)^{e_5 v \sum_{j=1}^{q} B'j/E'_0}}{\left(-\frac{n}{c_4}\right)^{c_4 w \sum_{j=n'+1}^{p'} D'j/E'_0} (-e_4)^{e_4 u \sum_{j=1}^{p} A'j/E'_0} (E_1^{e_1}\, x^{b_1(e_1/E'_0)\mu}}$$

$$(E_3\, z^{b_3(1/E'''_0)})^v (-c_4)^{c_4 w(1+\sum_{j=1}^{q} B'j/E'_0 + \sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0 - \sum_{j=1}^{p'} D'j/E'_0 - \sum_{j=1}^{p} A'j/E'_0)}$$

$$\times \overline{(-e_3)^{e_3 v \sum_{j=1}^{p} A'j/E'_0} (E_1^{e_2}\, x^{b_1(e_2/E'_0)})^v \left(-\frac{n}{e_3}\right)^{e_3 v \sum_{j=1}^{N} A'j/E'_0}}$$

$$\left(E_1^{c_4} \,.\, x^{b_1 \frac{c_4}{E'_0}}\right)^w (c_1 z)^w \Big\}$$

अब $x=1$ तथा $v=0$ रखने पर तथा थोड़े से सरलीकरण के पश्चात्

$$B_1 = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(E_2\, y^{b_2/E''_0} (-e_1)^{e_1 \sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0})^n}{u!\,(E_1^{e_1})^u} \times \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(c_1 z)^w}{w!\,(c_1^{c_4})^w}$$

$$= \exp\left(\frac{(E_2\, y^{b_2/E''_0} (-e_1)^{a_1 \sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0})}{(E_1^{e_1})}\right) \exp\left(\frac{c_1 z}{c_1^{c_4}}\right)$$

अतः प्रमेय सिद्ध हुआ।

**उपप्रमेय 1.** (2.1) में $a_2=0$, $z=\cos c/n$ रखने पर

$$\lim_{n\to\infty} \Big\{\frac{1}{R} \times \phi_n^*\Big(1,\, n^{-\frac{E''_0}{b_2}\{e_1 P''\, e_6 \left(\sum_{j=1}^{q} B'j/E'_0\right)}$$

$$+ e_4 \left(\sum_{j=1}^{p} A'j/E'_0\right)\Big\}_{y,}\, n^{-c_4(P'-a')} \cos \frac{c}{n}\Big)\Big\}$$

$$= e^{(c^1)^{(1-c_4)}} \qquad (2.2)$$

**उपप्रमेय 2.** (2.1) में $c_1=0, y=\cos c/n$ रखने पर

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{R} \times \phi_n^* \left(1, - n^{\frac{E''_0}{n}} \left\{e_1 P'' + e_6 \sum_{j=1}^{q} B'j/E'_0 + e_4 \left( \sum_{j=1}^{p} A'j/E'_0 \right)\right\} \cos c/n, \; n^{-c_4(P'-Q')} z \right)\right\}$$

$$= \exp \frac{E_2(-e_1)\, e_1 \sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0}{(E_1{}^{e_1})} \tag{2,3}$$

**उपप्रमेय 3.** (2.1) में $y=\cos \delta/n$ तथा $z=\cos \lambda/n$ रखने पर

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{R} \times \phi_n^* \left(1, n^{-\frac{E''_0}{b_2}\left\{ e_1 P'' + e_6 \left( \sum_{j=1}^{q} B'j/E'_0 \right) + e_4 \left( \sum_{j=1}^{p} A'j/E'_0 \right) \right.} \cos\frac{\delta}{n}, \; n^{-c_4(P'-Q')} \cos\frac{\lambda}{n} \right)\right\}$$

$$= e^{E_2(-e_1)\; e_1 \sum_{i=1}^{q'} E'j/E'_0} \; e^{\left(\frac{c_1}{c_1{}^{c_4}}\right)} \tag{2.4}$$

**प्रमेय 3.** (1.2) से

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{R} \phi_n^* \left((n)^{-\left\{ e_2 \left(1 + \sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0 - \sum_{j=1}^{p'} D'j/E'_0\right) + e_5 \left( \sum_{j=1}^{q} B'j/E'_0\right) - e_3 \left( \sum_{j=1}^{p} A'j/E'_0 \right) \times \right.} \right.\right.$$

$$-\left\{ e_1 \left(1 + \sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0 - \sum_{j=1}^{p'} D'j/E'_0 + e_6 \left( \sum_{j=1}^{q} B'j/E'_0 \right)\right.\right.$$

$$+e_4\left(\sum_{j=1}^{p} A'_j/E'_0\right)\Big\}_{y,\ n}-c_4(P'-Q'))\Big\}$$

$$=F\left[\begin{matrix}(Q_2(i,j)),\ 1-(Q_5(i,j); \\ (Q_8(i,j)); \\ e_1\left(\sum_{j=1}^{q'} E'_j/E'_0\right) \\ y(-e_1)\end{matrix}\right] F\left[\begin{matrix}(Q_3(i,j)),\ 1-(Q_6(i,j)); \\ (Q_9(i,j)); \\ X\end{matrix}\right] xe^z$$

उपपत्ति : वाम पक्ष को $B_2$ से द्योतित करें तो

$$B_2=\lim_{n\to\infty}\left\{R\sum_{u=0}^{[n/e_1]}\sum_{v=0}^{[n/e_2]}\sum_{w=0}^{[n/c_4]}\frac{\Delta_u[e_1;\ -n]\ \Delta^3{}_u[e_1:\ 1-(Q_2(i,j))-n]}{u!\ v!\ w!\ \Delta^1{}_u[e_1;\ 1-(Q_1(i,j))-n]}\right.$$

$$\times\frac{\Delta^4{}_u[e_6;\ 1-(Q_{12}(i,j))-n+e_5v]\ [(Q_2(i,j))]_u\ [1-(Q_5(i,j))]_u\ \Delta_v[e_2;\ -n+e_1u]}{\Delta^2{}_u[e_4;\ 1-(Q_{10}(i,j))-n+e_3v]\ \Delta^5{}_u[e_4;\ (Q_{11}(i,j))-n+e_3v]}$$

$$\times\frac{\Delta^3{}_v[e_2;\ 1-(Q_7(i,j))--n+e_1u]\ \Delta^4{}_v[e_5;\ 1-(Q_{12}(i,j))-n]\ [(Q_3(i,j))]_v}{\Delta^6{}_u[e_1;\ (Q_4(i,j))-n]\ [(Q_8(i,j))]_u\ \Delta^1{}_v[e_2;\ 1-(Q_1(i,j))-n+e_1u]}$$

$$\times\frac{[1-(Q_6(i,j))]_v\ \Delta_w[c_4;\ -n+e_1u+e_2v]\ \Delta^3{}_w[c_4;\ 1-(Q_7(i,j))-n+e_1u+e_2v]}{\Delta^2{}_v[e_3;\ 1-(Q_{10}(i,j))-n]\ \Delta^5{}_v[e_3;\ (Q_{11}(i,j))-n]\ \Delta^6{}_v[e_2;\ (Q_4(i,j)-n+e_1u]}$$

$$\times\frac{\Delta^4{}_w[c_4;\ 1-(Q_{12}(i,j))-n+e_5v+e_6u]\ (-e_1)^{e_1up''}\ (-e_2)^{e_2vp''}}{[(Q_9(i,j))]_v\ \Delta^1{}_w[c_4;\ 1-(Q_1(i,j))-n+e_1u+e_2v]}$$

$$\times\frac{(L_1)^u\ (L)^v}{\Delta^2{}_w[c_4;\ 1-(Q_{10}(t,j))-n+e_3v+e_4u]\ \Delta^5{}_w[c_4;\ (Q_{11}(i,j))-n+e_3v+e_4u]}$$

$$\times\frac{(-c_4)^{c_4w(P'-Q')}\ (c_1\ z)^w}{\Delta^6{}_w[c_4;\ (Q_4(i,j))-n+e_1u+e_2v]\ (E_1{}^{c_4}\ x^{b_1(c_4/E'_0)})^w}$$

परिणाम $\Delta_v\ [m;\ -n]\simeq(-n/m)^{mv}$

तथा अन्यों के लिए ऐसे ही परिणाम का प्रयोग करने पर

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{R\sum_{u=0}^{[n/e_1]}\frac{(n)^{e_1u\left(1+\sum_{j=1}^{q'}E'_j/E'_9-\sum_{j=1}^{p'}D'_j/E'_0\right)}}{[(Q_8(i,j))]_u}\right.$$

$$\times \frac{n^{e^6 u \sum_{j=1}^{q} B'j/E'_0} [1-(Q_5(i,j))]_u \, (n)^{e_4 u (\sum_{j=1}^{p} A'j/E'_0}}{(E_1^{e_1} x^{(b_1(e_1/E'_0)})^n}$$

$$\times \frac{(-e_1)^{e_1 u (\sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0} (E_2\, y^{b_2/E''_0})^u [(Q_2(i,j))]_u}{u!}$$

$$\times \sum_{v=0}^{[n/e_2]} \frac{(n)^{e_2 v (1+\sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0 - \sum_{j=1}^{p'} D'j/E'_0} (n)^{e_5 v (\sum_{j=1}^{q} B'j/E'_9)}}{v!\, [(Q_9(i,j))_v}$$

$$\times \frac{(n)^{-e_3 v \sum_{j=1}^{p} A'j/E'_0} (E_3\, z^{b_3/E'''_0})^v [(Q_3(i,j))]_v [1-(Q_6(i,j))]_v}{(E_1^{e_2}\, x^{b_1(c_4/E'_0)})^v}$$

$$\times \sum_{w=0}^{[n/c_4]} \frac{(n)^{c_4 w (1+\sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0 + \sum_{j=1}^{q} B'_i/E'_0 - \sum_{j=1}^{p} A'j/E'_0)} (c_1 z)^w}{w!\, (c_1^{c_4}\, x^{b_1(c_4/E'_0)})^w} \Bigg\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-e_1)^{e_1 u (\sum_{j=1}^{q'} E'j/E'_0)} [(Q_2(i,j))]_u [1-(Q_5(i,j))]\, (y)^n}{u!\, (E_1^{e_1})^n [(Q_8(\bar{i},j))]_u}$$

$$\times \sum_{v=0}^{\infty} \frac{[(Q_8(i,j))]_v [1-(Q_6(i,j))]_v (x)^v}{v!\, [(Q_9(i,j))]_v}$$

$$\times \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(z)^w}{w!}$$

$$=F\left[\begin{matrix}(Q_2(i,j)),\ 1-(Q_8(i,j)); \\ (Q_8(i,j)); \\ \\ (y(-e)_1)\quad e_1(\sum_{j=1}^{q'} E'_j/E'_0)\end{matrix}\right]\times F\left[\begin{matrix}(Q_3(i,j)),\ 1-(Q_6(i,j)); \\ (Q_9(i,j)); \\ x\end{matrix}\right]\times e^z$$

अतः प्रमेय सिद्ध हुआ है ।

(2.1) की बिशिष्ट दशायें

(2.1) के प्राचलों का विशिष्टीकरण करने पर

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \quad (2x)^{-2n} H_{2n}(1)=e$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \quad (vx)^{-n} H_{n,m,v}(1)=e$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \quad (x)^{-n} g_n^m(1, hn^{-m})=e^h$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \quad (2y)^{-n} H_n(1)=e^{-4}$

(2.2) की विशिष्ट दशायें

(2.2) के प्राचलों का विशिष्टीकरण करने तथा $c_3=-1$, $c_2=-1$ रखने पर

(i) $$\lim_{n\to\infty}\left\{n!\left(-\frac{m}{vx}\right)^{-mn} \overset{*}{\phi}_n\left(n\left(-\frac{m}{yx}\right)^m, n\frac{1}{y^2}, n^{-c_4} z\right)\right\}$$

$$=(2xyv)^{-n} H_n(y)\, H_{n,m,v} \exp(z)$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty}\left\{n!\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{-n} \overset{*}{\phi}_n\left(n\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right), \left(\frac{1-x^2}{x^2}\right), n^{-c_4}z\right)\right\}$$

$$=\frac{n!\,n!\,x^{-2n}}{(2\alpha)_n}\, c_n^{\alpha}(x)\, P_n(x) \exp(z)$$

(iii) $$\lim \quad \left\{n!\, y^{-n} \overset{*}{\phi}_n\left(ny,\ n\left(\frac{1-x^2}{x}\right), n^{-c_4} z\right\}\right.$$

$$=\frac{n!\, n!\, z^{-n}}{(1+a)_u} P_u(x)\, L_n^{a}(y) \exp(z)$$

(iv) $$\lim_{n\to\infty} \left\{ n!\quad c_1^{-n}\ \phi_n^{*}\left(nc_1, n\left(\frac{h}{x^m}\right), n^{-c_4} z\right)\right\}$$

$$=\frac{(x-n)!\,(-c_1)^n\, x^{-n}}{n!}\ g_n^{m}(x, h)\, c_n(x; c_1) \exp(z).$$

## निर्देश


1. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, 1960.
2. सिंह, आर० तथा तिवारी, आर० के०, Mendel, 1990, 7(3-4), 431-433.
3. प्रसाद, वाई० एन०, **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका,** 1985, 28(4), 361-77.
4. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **98**, 395-429.

Vijanana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 4, 1994

# दो चरों वाले सार्वीकृत फलन के लिए कुछ सान्त संकलन, आवर्ती सम्बन्ध तथा सर्वसनिकाएँ

एच० एस० पी० श्रीवास्तव
गणित विभाग, शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, रतलाम (म० प्र०)

[ प्राप्त—फरवरी 22, 1994 ]

## सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य दो चरों के सार्वीकृत फलन वाली कई सान्त श्रेणियों का मूल्यांकन करना है जिसमें दो चरों वाले सार्वीकृत फलन को द्विगुण मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकल के रूप में व्यक्त किया गया है, समाकलन तथा संकलन के क्रम को परस्पर बदलते हुए ज्ञात परिणाम की सहायता से समाकलन के अन्तर्गत संकलन का मूल्यांकन किया गया है।

## Abstract

**Some finite summations, recurrence relations and identities for a generalized function of two variables.** *By* H. S. P. Srivastava, Department of Mathematics, Government Science College, Ratlam (M. P.).

The object of the present paper is to evaluate a number of finite series involving generalized H-function of two variables as double Mellin-Barnes type contour integral, interchanging the order of integration and summation and evaluating the summation inside the integral with the help of various known results. Also interesting identities and recurrence relations have been deduced.

On specializing the parameters of the functions involved in relations various results scattered over the literature may be derived as particular cases. The generalised H-function of two variables due to author[14] contains all the function of two variables defined so far, viz. function due to Mourya[9], Kalla and Munot[5], Mittal and Gupta[8], Pathak[10], Sharma[12], Agarwal[1], Chaturvedi and Goyal[4], Mathur[12], and Verma[15].

## प्रस्तावना

लेखक[14] ने द्विगुण मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकल के द्वारा दो चरों वाले एक सार्वीकृत फलन को प्रचारित किया है जिसे निम्नवत् प्रदर्शित किया जावेगा :

$$H^{m_1, n_1 : (m_2, n_2) : (m_3, n_3)}_{p_1, q_1 : [p_2, q_2]; [p_3, q_3]} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1} : A_{p_1}, A'_{p_1})) : ((c_{p_2}, C_{p_2})); ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) : ((d_{q_2}, D_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right] \quad (1.1)$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \int_L \int_T \psi(s, t)\, \theta_1(s)\, \theta_2(t)\, x^s y^t\, ds\, dt.$$

जहाँ

$$\psi(s, t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(b_j - B_j s - B'_j t) \prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1 - a_j + A_j s + A'_j t)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1} \Gamma(1 - b_j + B_j s + B'_j t) \prod_{j=n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j - A_j s - A'_j t)}, \quad (1.2)$$

$$\theta_1(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j - D_j s) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1 - c_j + C_j s)}{\prod_{j=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1 - d_j s + D_j s) \prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j - C_j s)} \quad (1.3)$$

$$\theta_2(t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(f_j - F_j t) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1 - e_j + E_j t)}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3} \Gamma(1 - f_j + F_j t) \prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j - E_j t)} \quad (1.4)$$

समाकल (1.1) परम रूप से अभिसारी होता है यदि

$$|\arg x| < \tfrac{1}{2} A\pi, \ |\arg y| < \tfrac{1}{2} B\pi;$$

$f(x, y) = O(x^k y^l)$, लघु $x$, $y$ के लिए

$= O(x^\rho y^\lambda e^{-\mu x - \nu y})$, बृहद $x$, $y$ के लिए

$$A \equiv \sum_{j=1}^{n_1} A_j + \sum_{j=1}^{n_2} C_j + \sum_{j=1}^{m_1} B_j + \sum_{j=1}^{m_2} D_j - \sum_{j=n_1+1}^{p_1} A_j - \sum_{j=n_2+1}^{p_2} C_j$$

$$- \sum_{j=m_1+1}^{q_1} B_j - \sum_{j=m_2+1}^{q_2} D_j$$

$$B=\sum_{j=1}^{n_1} A'_j+\sum_{j=1}^{n_3} E_j+\sum_{j=1}^{m_1} B'_j+\sum_{j=1}^{m_3} F_j-\sum_{j=n_1+1}^{p_1} A'_j-\sum_{j=n_3+1}^{p_3} E_j$$

$$-\sum_{j=m_1+1}^{q_1} B'_j \sum_{j=m_3+1}^{q_3} F_j$$

यही नहीं, $H$-फलन में प्राचलों के उन्हीं सेटों का उल्लेख करेंगे जहां कुछ परिवर्तन होता है।

उदाहरणार्थ

$$H^{m_1+1,\, n_1+1\,:\,(m_2,\, n_2);\,(m_3,\, n_3)}_{p_1+2,\, q_1+2\,:\,[p_2,\, q_2];\,[p_3,\, q_3]}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (\alpha;\, k,\, k),\, ((a_{p_1}:\, A_{p_1},\, A'_{p_1})), \\ (\beta;\, k,\, k),\, ((b_{q_1};\, B_{q_1},\, B'_{q_1})), \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} (\delta;\, k,\, k):((c_{p_2},\, C_{p_2}));\, ((e_{p_3},\, E_{p_3})) \\ (\gamma;\, k,\, k):((d_{q_2},\, D_{q_2}));\, ((f_{q_3},\, F_{q_3})) \end{matrix}\right]$$

को निम्नवत् लिखा जावेगा—

$$H^{m_1+1,\, n_1+1}_{p_1+2,\, q_1-2}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (\alpha;\, k,\, k),\, ((a_{p_1};\, A_{p_1},\, A'_{p_1})),\, (\delta;\, k,\, k) \\ (\beta;\, k,\, k),\, ((b_{q_1};\, B_{q_1},\, B'_{q_1})),\, (\gamma;\, k,\, k) \end{matrix}\right]$$

(1.1) में परिभाषित द्विगुण कंटूर समाकल को उसके संकुचित रूप में $H(x, y)$ द्वारा प्रदर्शित किया जावेगा।

2. इस अनुभाग में हम सान्त संकलनों का मूल्यांकन करेंगे।

**प्रथम संकलन**

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{n+r}\, {}^{n}c_r}{\Gamma(1+b-a_{p_1}+r)} \times H^{m_1+1,\, n_1}_{p_1,\, q_1+1}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} ((a_{p_1};\, A_{p_1},\, A'_{p_1})) \\ (b+r;\, \sigma_1,\, \sigma_2),\, ((b_{q_1};\, B_{q_1},\, B'_{q_1})) \end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+b-a_{p_1}+n)} \times H^{m_1+2,\, n_1}_{p_1+1,\, q_1+2}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} ((a_{p_1};\, A_{p_4},\, A'_{p_1})), \\ (a_{p_1};\, \sigma_1,\, \sigma_2),\, (b;\, \sigma_1,\, \sigma_2), \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} (a_{p_1}-n;\, \sigma_1,\, \sigma_2) \\ ((b_{q_1};\, B_{q_1},\, B'_{q_1})) \end{matrix}\right] \quad (2.1)$$

बशर्ते कि $n$, $r$ धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं

$$\sigma_1, \sigma_2 \geqslant 0,\ |\arg x| < \tfrac{1}{2}A\pi,\ |\arg y| < \tfrac{1}{2}B\pi,\ 1+b-a_{p_1} \neq 0,\ -1,\ -2, \ldots$$

उपपत्ति : दक्षिण पक्ष के $H$-फलन को द्विगुण मेलिन-बार्नीज प्रकार का कंटूर समाकल (1.1) के

रूप में व्यक्त करने, समाकलन तथा संकलन का क्रम परस्पर परिवर्तित करने पर जो [2, p. 176 (75)] को दृष्टि में रखते हुए वैध है, हमें

$$\frac{(-1)^n}{\Gamma(1+b-a_{p_1}} \times \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \times \int_L \int_T \psi(s, t)\, \theta_1(s)\, \theta_2(t)\, a^s\, y^t$$

$$\times \Gamma(b-\sigma_1 s-\sigma_2 t) \times {}_2F_1(-n, b-\sigma_1 s-\sigma_2 t; 1+b-a_{p_1}; 1)\, ds\, dt$$

गास प्रमेय [6, p. 109 (4.1.1)], [11, p. 32(9)] तथा (1·1) $H$-फलन की परिभाषा का प्रयोग करने पर हमें (2.1) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

**द्वितीय संकलन**

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, {}^nc_r\, H^{m_1+1,\, n_1}_{p_1+1,\, q_1+1} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})),\ (b+r; \sigma_1, \sigma_2) \\ ((a+r; \sigma_1, \sigma_2),\ ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{\Gamma(b-a+n)}{\Gamma(b-} \times H^{m_1+1,\, n_1}_{p_1+1,\, q_1+1} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})),\ (b+n; \sigma_1, \sigma_2) \\ (a; \sigma_1, \sigma_0),\ ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) \end{matrix} \right] \quad (2.2)$$

जहाँ, $n$, $r$ धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं

$$\sigma_1, \sigma_2, \geqslant 0,\ |\arg x| > \tfrac{1}{2} A\pi,\ |\arg y| < \tfrac{1}{2} B\pi.\ Re(b-a+n) > 0.$$

**उपपत्ति** : (1.1) के वामपक्ष में करने संकलन तथा समाकलन का क्रम स्थानापन्न करने पर

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_L \int_T \psi(s, t)\, \theta_1(s)\, \theta_2(t)\, x^s\, y^t \times \frac{\Gamma(a-\sigma_1 s-\sigma_2 t)}{\Gamma(b-\sigma_1 s-\sigma_2 t)}$$

$$\times {}_2F_1\, (-n, a-\sigma_1 s-\sigma_2 t; b-\alpha_1 s-\sigma_2 t; 1)\, ds\, dt.$$

गास प्रमेय [6, p. 109 (4.1.1)] तथा (1.1) $H$-फलन की परिभाषा प्रयोग करने पर हमें वांछित परिणाम प्राप्त होता है।

(2.2) की ही तरह आगे बढ़ने पर हम निम्नलिखित संकलनों का आसानी से मूल्यांकन कर सकते हैं :

**तृतीय संकलन**

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, {}^nc_r\, H^{m_1+1,\, n_1}_{p_1,\, q_1+2} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})) \\ (a+r; \sigma_1, \sigma_2)\, ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})),\ (b-r; \sigma_1, \sigma_2) \end{matrix} \right]$$

$$= H^{m_1+1,\, n_1+1}_{p_1+1,\, q_1+3} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (b+a-n; 2\sigma_1, 2\sigma_2),\ ((a_{p_1}\, A_{p_1}, A'_{p_1})) \\ (a; \sigma_1, \sigma_2),\ ((b_{q_1}, B_{q_1}, B'_{q_1})),\ (b-n; \sigma_1, \sigma_2))\ (b+q; 2\sigma_1, 2\sigma_2) \end{matrix} \right] \quad (2.3)$$

यदि $n$, $r$ धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं

$$\sigma_1, \sigma_2 \geqslant 0, |\arg x| < \tfrac{1}{2}A\pi, |\arg y| < \tfrac{1}{2}B\pi.$$

**चतुर्थ संकलन**

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r \, {}^nc_r}{\Gamma(b-c-n+r)} \times H^{m_1+1, n_1}_{p_1, q_1+1} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})) \\ (b+r; \sigma_1, \sigma_2), ((b_{q_1}, B_{q_1}, B'_{q_1})) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(b-c)} \times H^{m_1+1, n_1+1}_{p_1+1, q_1+2} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (c+1; \sigma_1, \sigma_2), ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})) \\ (b; \sigma_1, \sigma_2), ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})), (c+1+n; \sigma_1, \sigma_2) \end{matrix} \right] \tag{2.4}$$

बशर्ते कि $n$, $r$ धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं

$$\sigma_1, \sigma_2 \geqslant 0, |\arg x| < \tfrac{1}{2}A\pi, |\arg y| < \tfrac{1}{2}B\pi, b-c-n \neq 0, -1, -2, \dots .$$

**पंचम संकलन**

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \; {}^nc_r \times H^{m_1+1, n_1+1}_{p_1+1, q_1+1} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a+r; \sigma_1, \sigma_2), ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})) \\ (b+r; \sigma_1, \sigma_2), ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{\Gamma(a-b+n)}{\Gamma(a-b)} \times H^{m_1+1, n_1+1}_{p_1+1, q_1+1} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a+n; \sigma_1, \sigma_2), ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})) \\ (b; \sigma_1, \sigma_2), ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) \end{matrix} \right] \tag{2.5}$$

यदि $n$, $r$ धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं

$$\sigma_1, \sigma_2 \geqslant 0, |\arg x| < \tfrac{1}{2}A\pi, |\arg y| < \tfrac{1}{2}B\pi, Re(a-b+n) > 0.$$

उपपत्ति : (2.1) की ही तरह आगे बढ़ते हैं।

**छठा संकलन**

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{{}^nc_r}{F(1+k+r)\,\Gamma(1-k-n+r)}$$

$$\times H^{m_1+1, n_1}_{p_1+1, q_1+1} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), (a-r; \sigma_1, \sigma_2) \\ (a+r; \sigma_1, \sigma_2), ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-k)\,\Gamma(1+k+n)}$$

$$\times H^{m_1+2, n_1}_{p_1+2, q_1+2} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1}))\, (a+k; \sigma_1, \sigma_2), (a-k-n; \sigma_1, \sigma_2) \\ (a-k; \sigma_1, \sigma_2), (a+k+n; \sigma_1, \sigma_2), ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) \end{matrix} \right] \tag{2.6}$$

यदि $u$, $r$ धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं

$$\sigma_1, \sigma_2 \geqslant 0, \ |\text{grg } x| < \tfrac{1}{2}A\pi, \ |\arg y| < \tfrac{1}{2}B\pi.$$

**उपपत्ति :**

उपर्युक्त की ही तरह आगे बढ़ने पर वाम पक्ष

$$= \frac{1}{\Gamma(1+k)\,\Gamma(1-k-n)} \times \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \times \int_L \int_T \psi(s, t)\, \theta_1(s)\, \theta_2(t)\, x^s\, y^t$$

$$\times {}_3F_2\, (a-\sigma_1 s-\sigma_2 t,\ 1-a+\sigma_1 s+\sigma_2 t,\ -n;\ 1-k-n;\ 1)\ ds\ dt.$$

सालसुट्ज प्रमेय, [6, p. 111 (4.1.12)], [11, p. 32] (9), तथा परिभाषा (101) को व्यवहृत करने पर हमें वांछित परिणाम प्राप्त होता है।

**सातवां संकलन**

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{{}^nc_r}{\Gamma(2\beta+r)\,\Gamma(1-2\beta-2n+r)}$$

$$\times H^{m_1+1,\, n_1}_{p_1+1,\, q_1+1} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1};\ A_{p_1},\ A'_{p_1})),\ (2\alpha-r:\ 2\sigma_1,\ 2\sigma_2) \\ (2\alpha+r;\ 2\sigma_1,\ 2\sigma_2),\ ((b_{q_1};\ B_{q_1},\ B'_{q_1})) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{2^{2n}}{\Gamma(2\beta+n)\,\Gamma(1-2\beta-n)}$$

$$\times H^{m_1+2,\, n_1}_{p_1+2,\, q_1+2} \left[ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_{p_1};\ A_{p_1},\ A'_{p_1})),\ (\alpha+\beta;\ \sigma_1,\ \sigma_2), \\ (\alpha+\beta+n;\ \sigma_1,\ \sigma_2),\ (\alpha-\beta+\tfrac{1}{2};\ \sigma_1,\ \sigma_2, \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (\alpha-\beta-n+\tfrac{1}{2};\ \sigma_1,\ \sigma_2) \\ ((b_{q_1};\ B_{q_1},\ B'_{q_1})) \end{matrix} \right] \qquad \text{.7)}$$

बशर्ते $n$, $r$ धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं

$$\sigma_1, \sigma_2 \geqslant 0, \ |\arg x| < \tfrac{1}{2}A\pi, \ |\arg y| < \tfrac{1}{2}B\pi.$$

**उपपत्ति**

ऊपर की ही तरह आगे बढ़ने पर तथा ह्विपल के प्रमेय के परिवर्धित रूप का प्रयोग करने पर जिसे दजर्बस्ज़न [6, p. 113. (4.1.17)] ने दिया है। अर्थात्

$${}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} a,\ 1-a,\ -n \\ f,\ 1-2n-f \end{matrix} ;\ 1 \right\} = \frac{2^{2n}\,(a/2+f/2)_n\,(a/2-n-f/2+1/2)_n}{(f)_n\,(1-2n-f)_n}$$

हमें आसानी से परिणाम प्राप्त होता है।

**आठवां संकलन**

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r\, {}^n c_r\, \Gamma(\beta+n+r)}{\Gamma(1+\beta+2r)}$$

$$\times H_{p_1+1,\, q_1+1}^{m_1+1,\, n_1}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} ((v_{p_1};\, A_{p_1},\, A'_{p_1})),\, (\alpha+r;\, \sigma_1,\, \sigma_2) \\ (\alpha+2r;\, \sigma_1,\, \sigma_2)\, ((b_{q_1};\, B_{q_1},\, B'_{q_1})) \end{matrix}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n}{(\beta+2n)} \times H_{p_1+1,\, q_1+1}^{m_1+1,\, n_1}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} ((a_{p_1};\, A_{p_1},\, A'_{p_1})),\, (\alpha-\beta-n;\, \sigma_1,\, \sigma_2) \\ (\alpha-\beta;\, \sigma_1,\, \sigma_2),\, ((b_{q_1};\, B_{q_1},\, B'_{q_1})) \end{matrix}\right] \quad (2.8)$$

जहाँ $n$, $r$ धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं

$$\sigma_1,\, \sigma_2 \geqslant 0,\, |\arg x| < A\pi,\, |\arg y| < \tfrac{1}{2}B\pi.$$

**उपपत्ति**

यथावत् आगे बढ़ते हुए तथा

$$(\alpha)_{2n} = 2^{2n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)_n \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)_n$$

का प्रयोग करने पर

$$\text{वाम पक्ष} = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(1+\beta)} \times \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \times \int_L \int_T \psi(s,\, t)\, \theta_1,\, s)\, \theta_2(t)\, x^s\, y^t$$

$$\times {}_4F_3 \left\{\begin{matrix} -n,\, \frac{1}{2}(\alpha-\sigma_1 s-\sigma_2 t),\, \frac{1}{2}(1+\alpha-\sigma_1 s-\sigma_2 t),\, \beta+n \\ \alpha-\sigma_1 s-\sigma_2 t,\, \frac{1}{2}(\beta-1),\, \beta/2+1 \end{matrix} ;\, 1\right\} ds\, dt$$

कार्लिट्ज के प्रमेय[3] का प्रयोग करने पर जो है

$${}_4F_3 \left\{\begin{matrix} -n,\, \frac{1}{2}(\alpha+1),\, \alpha/2+1,\, \beta+n \\ \alpha+1,\, \frac{1}{2}(\beta+1),\, \beta/2+1 \end{matrix} ;1\right\} = \frac{\beta(\beta-\alpha)_n}{(\beta+2n)\,(\beta)_n}.$$

तथा [11, p. 32(9)], का प्रयोग करने पर हमें (2.8) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

**नौवां संकलन**

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, {}^n c_r$$

$$\times H^{m_1+2,\, n_1}_{p_1+2,\, q_1+2}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\begin{matrix} ((a_{p_1};\, A_{p_1},\, A'_{p_1})),\, (1+a+b-c+r;\, \sigma_1,\, \sigma_2),\, (c+r;\, \sigma_1,\, \sigma_2) \\ (a+n+r;\, \sigma_1,\, \sigma_2),\, (b+r;\, \sigma_1,\, \sigma_2),\, ((b_{q_1};\, B_{q_1},\, B'_{q_1})) \end{matrix}\right]$$

$$=\frac{\Gamma(-b+n)\,\Gamma(a-c+1)}{\Gamma(c-b)\,\Gamma(a-c+1)}$$

$$\times H^{m_1+2,\, n_1}_{p_1+2,\, q_1+2}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\begin{matrix} ((a_{p_1};\, A_{p_1},\, A'_{p_1})),\, (1+a+b-c+r;\, \sigma_1,\, \sigma_2),\, (c+n;\, \sigma_1,\, \sigma_2) \\ (n+n+r;\, \sigma_1,\, \sigma_2),\, (b+r;\, \sigma_1,\, \sigma_2),\, ((b_{q_1};\, B_{q_1},\, B'_{q_1})) \end{matrix}\right] \tag{2.9}$$

बशर्ते कि $n$, $r$ धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं

$$\sigma_1,\, \sigma_2 \geqslant 0,\; |\arg x| < A\pi,\; |\arg y| < \tfrac{1}{2}B\pi.$$

**उपपत्ति**

यथावत् अग्रसर होने तथा सालशुट्ज प्रमेय का उपयोग करने पर इस सम्बन्ध को आसानी से प्राप्त किया जा सकता है।

**दसवां संकलन**

$$\sum_{r=0}^{n} {}^{n}c_r$$

$$\times H^{m_1+3,\, n_1}_{p_1+3,\, q_1+3}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\begin{matrix} ((a_{p_1};\, A_{p_1},\, A'_{p_1})),\, (a/2+r;\, \sigma_1,\, \sigma_2),\, (1+a-b+r;\, \sigma_1,\, \sigma_2)\,(1+a+n+r;\, 2\sigma_1,\, 2\sigma_2) \\ (a+r;\, 2\sigma_1,\, 2\sigma_2),\, (a/2+1+r;\, \sigma_1,\, \sigma_2),\, (b+r;\, \sigma_1,\, \sigma_2),\, ((b_{q_1};\, B_{q_1},\, B'_{q_1})) \end{matrix}\right]$$

$$=H^{m_1+3,\, n_1}_{p_1+3,\, q_1+3}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\begin{matrix} ((a_{p_1};\, A_{p_1},\, A'_{p_1})),\, (a/2;\, \sigma_1,\, \sigma_2),\, (1+a;\, 2\sigma_1,\, 2\sigma_2),\, (1+a-b+n;\, \sigma_1,\, \sigma_2) \\ (a;\, 2\sigma_1,\, 2\sigma_2),\, (a/2+1;\, \sigma_1,\, \sigma_2),\, (b;\, \sigma_1,\, \sigma_2),\, ((b_{q_1};\, B_{q_1},\, B'_{q_1})) \end{matrix}\right] \tag{2.10}$$

बशर्ते कि $n$, $r$ धनात्मक पूर्णांक हैं

$$\sigma_1,\, \sigma_2 \geqslant 0,\; |\arg x| < \tfrac{1}{2}A\pi,\; |\arg y| < B\pi.$$

**उपपत्ति**

पहले की तरह आगे बढ़ने पर तथा डिक्सन प्रमेय [13, p. 244 (III, 11)] अर्थात्

$${}_4F_3\,[-n,\, a/2+1,\, b,\, a:\, 1+a-b,\, 1+a+n,\, a/2;\; -1]=\frac{(1+a)_n}{(1+a-n)_n},$$

का प्रयोग करने पर हमें वांछित परिणाम प्राप्त होता है।

**ग्यारहवा संकलन**

$$\sum_{r=0}^{n} {}^{n}c_r \times H^{m_1+2,\, n_1}_{p_1+2,\, q_1+2}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\begin{matrix} ((a_{p_1};\, A_{p_1},\, A'_{p_1})),\, (a/2+r:\, \sigma_1,\, \sigma_2), \\ (a+r;\, 2\sigma_1,\, 2\sigma_2),\, (a/2+1+r;\, \sigma_1,\, \sigma_2), \\ (1+a+a+r;\, 2\sigma_1,\, 2\sigma_2 \\ ((b_{q_1};\, B_{q_1},\, E'_{q_1})) \end{matrix}\right] \tag{2.11}$$

$$=2^{-1}\times H^{m_1+1,\, n_1}_{p_1+1,\, q_1+1}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\begin{matrix} ((a_{p_1};\, A_{p_1},\, A'_{p_1})),\, (1/2+a|2+n;\, \sigma_1,\, \sigma_2) \\ (1/2+a/2;\, \sigma_1,\, \sigma_2),\, ((b_{q_1};\, B_{q_1},\, B'_{q_1})) \end{matrix}\right]$$

यदि $n$, $r$ धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं

$$\sigma_1,\ \sigma_2 \geqslant 0,\ |\arg x| < \tfrac{1}{2}A\pi,\ |\arg y| < \tfrac{1}{2}B\pi.$$

**उपपत्ति**

ह्विपल प्रमेय [13, p. 245 (III, 25)] अर्थात्

$${}_3F_2\,(a,\ 1+a/2,\ -n;\ a/2,\ 1+a+n;\ -1)=\frac{(1+a)_n}{(a/2+1/2)}.$$

का प्रयोग करने पर परिणाम को आसानी से स्थापित किया जा सकता है।

3. इस अनुभाग में हम कुछ दो चरों वाले सार्वीकृत फलन के लिए पिछले अनुभाग के परिणामों के प्राचलों के विशिष्टीकरण द्वारा कतिपय आवर्ती सूत्र प्राप्त करते हैं।

(i) (2.1) में $n=1$ रखने, $p_1$ को $p_1+1$ द्वारा प्रतिस्थापित करने

$$\sigma_1=A_{p_1},\ \sigma_2=A'_{p_1},\ b=a_{p_1+1},$$

$$B_1=A_{p_1+1},\ B'=A'_{p_1+1} \text{ तथा } b=b_1$$

लेने पर

$$(1+b_1-a_{p_1})\, H^{m_1,\, n_1}_{p_1,\, q_1}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\begin{matrix} ((a_{p_1};\, A_{p_1},\, A'_{p_1})) \\ (b_1+1;\, A_{p_1},\, A'_{p_1})),\, (b_2;\, B_2,\, B'_2)),\ldots,\, (b_{q_1};\, B_{q_1},\, B'_{q_1}) \end{matrix}\right]$$

$$=H^{m_1,\, n_1}_{p_1,\, q_1}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\begin{matrix} ((a_{p_1};\, A_{p_1},\, A'_{p_1})) \\ (b_1+1;\, A_{p_1},\, A'_{p_1}),\, (b_2;\, B_2,\, B'_2),\ldots,\, (a_{q_1},\, B_{q_1},\, B'_{q_1}) \end{matrix}\right]$$

$$-H^{m_1,\, n_1}_{p_1,\, q_1}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\begin{matrix} ((a_{p_1-1};\, A_{p_1-1},\, A'_{p_1})),\, (a_{p_1}-1;\, A_{p_1},\, A'_{p_1}) \\ (b_1;\, A_{p_1},\, A'_{p_1}),\, (b_2;\, B_2,\, B'_2),\, \ldots,\, (b_{q_1};\, B_{q_1},\, B'_{q_1}) \end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

बशर्ते $0 \leqslant n_1 < p_1$ तथा $0 < m_1 \leqslant q_1$

(ii) (2.2) में

$$n=1,\ b_1=a_{p_1},\ B_1=A_{p_1},\ B'_1=A'_{p_1},$$

$$a=b_1,\ b=a_{p_1},\ \sigma_1=A_{p_1},\ \sigma_2=A'_{p_1}$$

रखने तथा $a_{p_1}$ को $a_{p_1}-1$, द्वारा प्रतिस्थापित करने पर हमें पुनः (3.1) प्राप्त होता है।

(iii) (2.4) में

$$n=1,\ a_{p_1}=b_1,\ A_{p_1}=B_1,\ A'_{p_1}=B'_1,$$

$$b=b_1,\ \sigma_1=B_1,\ \sigma_2=B'_1,\ c=b_{q_1-1}-1,\ B_{q_1}=B_1,\ B'_{q_1}=B'_1$$

रखने पर तथा $p_1$ को $p_1+1$, द्वारा प्रतिस्थापित करने पर

$$(b_1-b_{q_1})\, H^{m_1,\, n_1}_{p_1,\, q_1}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} ((a_{p_1};\ A_{p_1},\ A'_{p_1})) \\ ((b_{q_1-1};\ B_{q_1-1},\ B'_{q_1-1})),\ (b_{q_1};\ B_1,\ B'_1) \end{matrix}\right]$$

$$=H^{m_1,\, n_1}_{p_1,\, q_1}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} ((a_{p_1};\ A_{p_1},\ A'_{p_1})) \\ (b_1+1;\ B_1,\ B'_1),\ (b_2;\ B_2,\ B'_2),\ldots,\ (b_{q_1-1};\ B_{q_1-1},\ B'_{q_1-1}),\ (b_{q_1};\ B_1,\ B'_1) \end{matrix}\right]$$

$$+H^{m_1,\, n_1}_{p_1,\, q_1}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} ((a_{p_1};\ A_{p_1},\ A'_{p_1})) \\ (b_1;\ B_1,\ B'_1),\ldots,\ (b_{q_1-1};\ B_{q_1-1},\ B'_{q_1-1}),\ (b_{q_1}+1;\ B_1,\ B'_1) \end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

बशर्ते $0 < m_1 < q_1$, $0 \leqslant n_1 \leqslant p_1$.

(iv) (2.5) में

$$n=1,\ a+1=a_1=b_{q_1},\ A_1=B_{q_1},\ A'=B'_{q_1},$$

$$b=b_1=a_{p_1},\ \sigma_1=B_1=A_{p_1},\ \sigma_2=B'_1=A'_{p_1},$$

रखने, $p_1$ को $p_1+1$ द्वारा तथा $q_1$ को $q_1+1$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर

$$(a_1-1-b_1)\, H^{m_1,\, n_1}_{p_1,\, q_1}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (a_1;\ B_1,\ B'_1),\ (a_2;\ A_2,\ A'_2),\ldots,\ (a_{p_1};\ A_{p_1},\ A'_{p_1}) \\ ((b_{q_1};\ B_{q_1},\ B'_{q_1})) \end{matrix}\right]$$

$$=H^{m_1,\, n_1}_{p_1,\, q_1}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (a_1-1;\ B_1,\ B'_1),\ (a_2;\ A_2,\ A'_2),\ldots,\ (a_{p_1};\ A_{p_1},\ A'_{p_1}) \\ ((b_{q_1};\ B_{q_1},\ B'_{q_1})) \end{matrix}\right]$$

$$-H^{m_1, n_1}_{p_1, q_1}\left[\begin{array}{c|l} x & (a_1; B_1, B'_1), (a_2; A_2, A'_2), \ldots, (a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1}) \\ y & (b_1+1; B_2, B'_2), (b_2; B_2, B'_2), \ldots, (b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1}) \end{array}\right]$$

बशर्ते कि $0 < n_1 \leqslant p_1$, $0 < m_1 \leqslant q_1$

4. इस अनुभाग में हम दो चरों वाले सार्वीकृत फलन के लिए कुछ सर्वसमिकाएँ व्युत्पन्न करेंगे :

$$H^{m_1+1, n_1}_{p_1+1, q_1+1}\left[\begin{array}{c|l} x & ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), (\alpha-1; \sigma_1, \sigma_2) \\ y & (\alpha+1; \sigma_1, \sigma_2), ((b_{q_1}, B_{q_1}, B'_{q_1})) \end{array}\right]$$

$$-H^{m_1+2, n_1}_{p_1+2, q_1+2}\left[\begin{array}{c|l} x & ((a_{p_1}; a_{p_1}, A'_{p_1})), (\alpha-k-1; \sigma_1, \sigma_2), (\alpha+1; \sigma_1, \sigma_2) \\ y & (\alpha-k; \sigma_1, \sigma_2). (\alpha+k+1; \sigma_1, \sigma_2), ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) \end{array}\right]$$

$$=k(k+1)\, H(x, y). \tag{4.1}$$

$$H^{m_1+2, n_1}_{p_1+2, q_1+2}\left[\begin{array}{c|l} x & ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), (\alpha-\tfrac{1}{2}; \sigma_1, \sigma_2), (\alpha; \sigma_1, \sigma_2) \\ y & (\alpha+\tfrac{1}{2}; \sigma_1, \sigma_2), (\alpha+1; \sigma_1, \sigma_2), ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) \end{array}\right]$$

$$-H^{m_1+2, n_1}_{p_1+2, q_1+2}\left[\begin{array}{c|l} x & ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_4})), (\alpha+\beta; \sigma_1, \sigma_2), (\alpha-\beta-\tfrac{1}{2}; \sigma_1, \sigma_2) \\ y & (\alpha+\beta+1; \sigma_1, \sigma_2), (\alpha-\beta+\tfrac{1}{2}; \sigma_1, \sigma_2), ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) \end{array}\right]$$

$$=\beta(\beta+\tfrac{1}{2})\, H(x, y). \tag{4.2}$$

$$H^{m_1+1, n_1}_{p_1+1, q_1+1}\left[\begin{array}{c|l} x & ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_1})), (\alpha+1; \sigma_1\, \sigma_2) \\ y & (\alpha+2; \sigma_1, \sigma_2), ((b_{q_1}; B_{q_1}, B'_{q_1})) \end{array}\right]$$

$$-H^{m_1+1, n_1}_{p_1+1, q_1+1}\left[\begin{array}{c|l} x & ((a_{p_1}; A_{p_1}, A'_{p_4})), (\alpha-\beta-1; \sigma_1, \sigma_2) \\ y & (\alpha-\beta; \sigma_1, \sigma_2), ((b_{q_1}: B_{q_1}, B'_{q_1})) \end{array}\right]$$

$$=(\beta+2)\, H(x, y). \tag{4.3}$$

## निर्देश


1. अग्रवाल, आर० पी०, Nat. Inst. Sci. India, 1995, A(**31**), 536-546.

2. कार्सला, एच० एस०, An Introduction to the theory of Fourier's series and integrals, Dover Publ. N. Y. 1950.

3. कार्लिट्ज, एल०, Boll. Un. Mat. Ital. 1963, **18**(3), 90-93.

4. चतुर्वेदी, के० के० तथा गोयल, ए० एन०, Indian J. Pure Appl. Math. 1972, 3, 357-360.

5. कल्ला, एस० तथा मुनोट, पी० सी०, Uni. Nac. Tucman. Rev. Sr. A 1971, **21**; 67-84.

6. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, Lecture Notes in Mathematics, Springer-verlag, N. 2. 1973,

7. माथुर, ए० बी०, पी-एच० डी० थीसिस, विक्रम विस्वविद्यालय, उज्जैन, 1969, 215-219.

8. मित्तल, आर० के० तथा गुप्ता, के० सी०, Proc. Indian Acad. Sci. 1972, **75**(3) 117-123.

9. मौर्या, डी० पी०, पी-एचडी० थीसिस, इन्दौर विस्वविद्यालय 1970.

10. पाठक, आर० एस०, Bull. Cal. Math. Sci. 1970, **62**, 97-106.

11. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, Macmillan and Co., N. Y. 1970.

12. शर्मा, बी० एल०, Ann. Sci. Bruxells, Ser I, 1965, **79**, 26-40.

13. स्लेटर, एल० टी०, Generalized Hypergeometric function, Cambridge 1966.

14. श्रीवास्तव, एच० एस० पी०, Act. Mex. De. Cie. Y. Tech, 1978.

15. वर्मा, आर० एन०, An. Sti. Univ. "Al-Icuza" Iasi. Aecr. I a Mat. 1971, **17** 103-110.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 4, 1994

# शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद के प्रायोगिक प्रक्षेत्र पर उपलब्ध मल जल तथा अवमल के प्रयोग से मृदा के धात्विक प्रदूषण का अध्ययन

**शिव गोपाल मिश्र तथा दिनेश मणि**
शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[ प्राप्त—जुलाई 10, 1994 ]

**सारांश**

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद के प्रायोगिक प्रक्षेत्र के निकट से बह रहे नगर महापालिका के नाले से मल-जल तथा अवमल के नमूने एकत्रित किये गये। मल-जल के पी० एच० मान, विद्युच्चालकता, जैव-रासायनिक आक्सीजन माँग, कुल कठोरता तथा कुल घुलनशील लवण की मात्रा ज्ञात करने के अतिरिक्त भारी धातुओं का सान्द्रण भी ज्ञात किया गया। मल-जल तथा अवमल के प्रयोग से मृदा में विभिन्न गहराइयों (जैसे0-10, 10-20, 40-30 तथा 30-40 सेमी०) पर चार प्रमुख भारी धातुओं—कैडमियम, क्रोमियम, लेड तथा जिंक—का वितरण देखा गया और यह पाया गया कि यद्यपि मल-जल तथा अवमल की घरेलू प्रकृति होने के कारण इनमें भारी धातुओं का सान्द्रण अपेक्षाकृत कम है परन्तु दीर्घकाल तक सिचाई के रूप में तथा अवमल का प्रयोग खाद के रूप में करते रहने से अन्ततोगत्वा सुरक्षित नहीं कहा जा सकता। मल-जल तथा अवमल के उपर्युक्त फार्म पर विगत 20 वर्षों से हो रहे निरन्तर प्रयोग के कारण यहाँ की मृदा में उपर्युक्त चारों भारी धातुओं का संचय हुआ है। यद्यपि जिंक को छोड़कर सभी भारी धातुओं का संचय गहराई के बढ़ने के साथ कम होता दिखाई देता है फिर भी 0-10 तथा 10-20 से० मी० गहराई तक इन भारी धातुओं की हानिकारक मात्रा विद्यमान है। मृदा को गहराई का जिंक के वितरण पर कोई विशेष प्रभाव नहीं देखा गया—अर्थात् इसका वितरण अनियमित कहा जा सकता है।

**Abstract**

**A case study of metallic pollution of soil caused by continuous use of sewage and sludge available at the experimental farm of Sheila Dhar Institute of Soil**

**Science, Allahabad.** *By* S. G. Misra and Dinesh Mani, Sheila Dhar Institute of Soil Science, University of Allahabad.

Representative sewage-sludge samples were cllected from the municipal drains flowing adjacent to the experimental farm of Sheila Dhar Institute of Soil Science, Allahabad. The contents of heavy metals present in sewage were also detected besides pH, electrical conductivity, biochemical oxygen demand, total hardness and total dissolved. Solid sludge samples were analysed for total organic carbon, nitrogen, phosphorus, potash and heavy metal content. The distribution pattern of four heavy metals viz. Cd, Cr, Pb and Zn at four different depths—0-10, 10-20, 20-30, and 30-40 cm of sewage-sludge treated soil was found out. It was found that due to the domestic nature of sewage and sludge it contained rather low concentration of heavy metals but in long-run the use of this sewage-sludge can not be said safe ultimately. The four heavy metals have accumulated in the farm soil due to continuous use of sewage-sludge for the last 20 years. Though, apart from Zn, the accumulation of all the heavy metals decreased with increasing depth, yet harmful concentrations of these heavy metals were found upto 0-10 and 10-20 cm depth. No considerable effect of soil depth was observed on the distribution of Zn.

मल-जल तथा अवमल में कार्बनिक पदार्थ, नाइट्रोजन तथा फास्फोरस की पर्याप्त मात्रा किन्तु पोटाश, गन्धक, सूक्ष्ममात्रिक पोषक तत्वों की कुछ ही मात्रा विद्यमान होने के कारण विभिन्न फसलों पर, विशेषतया सब्जियों पर इनका लाभकारी प्रभाव देखा गया है। किन्तु इनमें विभिन्न भारी धातुओं यथा कैडमियम, क्रोमियम, लेड, जिंक आदि के अधिक सान्द्रण-स्तर के कारण फसलों के खाद्य भागों यथा पत्तियों, जड़ों, तनों यहाँ तक कि दानों में भी इन भारी धातुओं के संचित होने से जानवरों तथा मनुष्यों द्वारा उपभोग किये जाने पर स्वास्थ्य पर प्रतिकूल प्रभाव पड़ सकता है। मल-जल से लगातार सिंचाई करते रहने से मिट्टी में भी विभिन्न भारी धातुओं के अधिक सान्द्रण स्तर तक बढ़ने की सम्भावना बनी रहती है[1]।

यद्यपि घरेलू मल-जल में इन धातुओं की मात्रा औद्योगिक वाहित मल-जल की तुलना में काफी कम होती है फिर भी भारी धातुओं के एकत्रित होने की प्रवृत्ति के कारण इनकी सान्द्रता बढ़ सकती है। इन भारी धातुओं की कुछ न कुछ मात्रा घरेलू मल-जल में भी विद्यमान रहती है[2]। मृदा पी० एच० 4-8 तक कार्बनिक पदार्थों के द्वारा भारी धातुओं की उपलब्धता बढ़ती है किन्तु जब कार्बनिक पदार्थ की अधिक मात्रा का प्रयोग करते हैं तो इनकी उपलब्धता घटती है[3]।

भारी धातुओं के अतिरिक्त मल-जल में कुछ घुलनशील लवणों की मात्रा, विद्युच्चालकता, जैव-रासायनिक आक्सीजन माँग आदि गुण भी इसकी गुणवत्ता को निर्धारित करते हैं। इनके अधिक होने पर मिट्टी की संरचना पर प्रतिकूल प्रभाव पड़ता है।

हमारे द्वारा किये गये घरेलू मल-जल तथा अवमल के उपयोग सम्बन्धी प्रारम्भिक प्रयोगों से यह स्पष्ट हो चुका है कि ऐसे जल से सिंचाई करने पर मृदा प्रदूषण बढ़ सकता है जिससे पौधे भारी धातुओं की अधिक मात्रा अवशोषित कर सकते हैं (विशेषकर उन दशाओं में जब मल-जल तथा अवमल को कार्बनिक पदार्थ या फास्फोरस के साथ प्रयोग न करके अकेले ही प्रयोग किया जाता है)। इस बार हमने मलजल तथा अवमल के विभिन्न नमूनों का विश्लेषण करने के अतिरिक्त मृदा में विभिन्न गहराइयों पर भारी धातुओं की संचयन प्रवृत्ति को भी ज्ञात करने का प्रयत्न किया। इस प्रपत्र में प्राप्त परिणाम प्रस्तुत किये जा रहे हैं।

## प्रयोगात्मक

मल-जल के दस नमूने शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रयोगात्मक प्रक्षेत्र के निकट से बह रहे नगरमहापालिका के नाले से विभिन्न स्थानों से लिए गये। इस नाले में मुख्यतः घरेलू अपशिष्ट ही रहता है। अवमल के चार नमूने भी इसी नाले से एकत्रित किये गये। इस प्रक्षेत्र पर उपलब्ध मल-जल के भौतिक-रासायनिक गुणधर्म सारणी-1 में दिये गये हैं। कुल घुलनशील लवण तथा जैव रासायनिक माँग सम्बन्धी परिणाम सारणी-2 में दिये गये हैं। ये विश्लेपण मैनवासकम द्वारा वर्णित विधियों द्वारा किये गये हैं। अवमल में उपस्थित कार्बनिक पदार्थ, नाइट्रोजन, फास्फोरस तथा पोटाश की मात्रा सारणी-3 में दर्शायी गयी है।

भारी धातुओं के विश्लेषण के लिए एटॉमिक एब्जार्प्शन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर (Atomic Absorption Spectrophotometer) की सहायता ली गयी। मल-जल या अवमल में कुल मात्रा ज्ञात करने के लिए शुष्क किये गये नमूनों को डाइ एसिड मिश्रण द्वारा निष्कर्षित किया गया तथा अवमल में उपलब्ध मात्रा ज्ञात करने के लिए डी० टी० पी० ए० द्वारा निष्कर्षण किया गया। मल-जल में भारी धातुओं की सान्द्रता सम्बन्धी परिणाम सारणी-5 में अंकित हैं।

सारणी-6 में शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र की मृदा में विभिन्न गहराइयों में भारी धातुओं के संचयन की प्रवृत्ति एवं सान्द्रता दर्शायी गयी है।

## परिणाम तथा विवेचना

विभिन्न परिणामों का विवरण इस प्रकार है—

सारणी-1 से स्पष्ट है कि वाहित मल-जल की प्रकृति उदासीन से हल्की क्षारीय है। इसकी विद्युच्चालकता 840 से 1920 $dSm^{-1}$ है। सारणी-2 को देखने पर पता चलता है कि इन नमूनों में कुछ घुलनशील लवण की मात्रा 188.20 से 432.40 मि० ग्रा०/ली० है तथा जैव-रासायनिक आक्सीजन माँग (BOD) 96.00 से 150.40 मि०ग्रा०/ली० तक है। इस प्रकार इन गुणों के आधार पर शीलाधर प्रक्षेत्र पर प्रयुक्त वाहित-मल जल बहुत बुरा नहीं कहा जा सकता।

सारणी-3 को देखने पर पता चलता है कि शीलाधर प्रक्षेत्र पर उपलब्ध अवमल में औसत रूप से 1.18% कार्बनिक कार्बन, 2.3% नाइट्रोजन, 1.8% फास्फोरस तथा 0.50% पोटाश विद्यमान है।

इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि पोषण मान की दृष्टि से यह अवमल औसत दर्जे का है। हाँ, इसमें कार्बनिक अंश न्यून है।

सारणी-4 में वाहित मल-जल में उपस्थित भारी धातुओं की सान्द्रता दर्शायी गयी है जबकि सारणी-5 में अवमल में उपस्थित भारी धातुओं की सान्द्रता दिखायी गयी है।

**कैडमियम**

वाहित मल-जल में कैडमियम की सान्द्रता 0.26 से 0.85 मि० ग्रा०/ली० तक पायी गयी। FAO[5] के अनुसार सिंचाई जल में कैडमियम की अधिकतम अनुमेय सान्द्रता 0.01 मि० ग्रा०/ली० है। इस प्रकार कैडमियम की मात्रा के आधार पर यह वाहित मल-जल सिंचाई के लिए अनुपयुक्त है।

**क्रोमियम**

क्रोमियम की मात्रा 0.28 से 0.70 मि० ग्रा०/ली० तक पायी गयी। FAO[5] के अनुसार सिंचाई जल में क्रोमियम की अधिकतम अनुमेय सान्द्रता 0.10 मि० ग्रा०/ली० है। इस प्रकार क्रोमियम की मात्रा के आधार पर भी यह वाहित मल-जल सिंचाई के लिए अनुपयुक्त है।

**लेड**

प्रस्तुत अध्ययन में वाहित मल-जल में लेड की सान्द्रता 0.70 से 5.80 मि० ग्रा०/ली० तक पायी गयी जबकि FAO[5] के अनुसार सिंचाई जल में लेड की अधिकतम अनुमेय सान्द्रता 5 मि० ग्रा०/ली० है। इस प्रकार लेड की मात्रा के आधार पर वाहित मल-जल सिंचाई हेतु प्रयोग करने पर उचित सावधानी बरतने की आवश्यकता है।

**जिंक**

जिंक की सान्द्रता 5.80 से 10.00 मि० ग्रा०/ली० तक पायी गयी। ऐसा वाहित मल-जल के घरेलू होने के कारण था। बॉउयर तथा चने[6] के अनुसार अधिकतम जिंक की सीमा (दीर्घकालीन सिंचाई उद्देश्य के लिए) 2 मि० ग्रा०/ली० है। इस प्रकार यह जल सिंचाई के लिए अनुपयुक्त ही कहा जायेगा।

**आयरन**

वाहित मल-जल में आयरन की मात्रा 8.00 से 12.00 मि० ग्रा०/ली० तक पायी गयी। FAO[5] तथा नेशनल एकेडमी ऑफ साइन्सेज[7] के अनुसार सिंचाई जल में आयरन की अधिकतम अनुमेय सान्द्रता 5 मि० ग्रा०/ली० है। इस प्रकार आयरन की मात्रा के आधार पर भी यह जल सिंचाई के लिए उपयोगी नहीं है।

**मैगनीज**

वाहित जल-मल में सिंचाई की मात्रा 10.60 से 13.60 मि० ग्रा०/ली० तक पायी गयी। **प्राट**[8] के अनुसार इसकी अधिकतम अनुमेय सान्द्रता 0.2 मि० ग्रा०/ली० है।

सारणी-6 में शीलाधर प्रक्षेत्र की वाहित मल-जल सिंचित तथा सामान्य मृदा में भारी धातुओं की सान्द्रता दर्शायी गयी है। गहराई के अनुसार इन भारी धातुओं के सान्द्रण में काफी असमानता परिलक्षित होती है। जिंक को छोड़कर शेष सभी भारी धातुओं का संचय गहराई के बढ़ने के साथ कम होता दिखाई देता है फिर भी 0-10 तथा 10-20 सेमी० गहराई तक इन भारी धातुओं की हानिकारक मात्रा विद्यमान है। जिंक के वितरण में मृदा की गहराई का कोई प्रभाव नहीं देखा जाता। **डेविश**[9] के अनुसार भारी धातुओं से संदूषित मृदा में उपलब्ध जिंक की सान्द्रता में 15-20 सेमी० से लेकर 50 सेमी० तक की गहराई तक तेजी से कमी आयी। तत्पश्चात् धीरे-धीरे इसका सान्द्रण कम हुआ।

निष्कर्ष के रूप में यह कहा जा सकता है कि मृदा में भारी धातुओं का संचय उस अधिकतम गहराई सीमा में होता है, जहाँ से फसलें जड़ों द्वारा अपना पोषण प्राप्त करती हैं।

**सारणी 1**

**शीलाधर मृदा-विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक-प्रक्षेत्र पर उपलब्ध मल-जल के भौतिक रासायनिक गुण**

| | |
|---|---|
| पी० एच० | 7.1-7.6 |
| विद्युच्चालकता (d $Sm^{-1}$) | 840-1920 |
| कुल ठोस पदार्थ (मिग्रा०/ली०) | 188-432 |
| कुल कठोरता (मि० ग्रा०/ली०) | 180-220 |
| क्षारीयता (मि० ग्रा०/ली०) | 130-240 |
| क्लोराइड (मि० ग्रा०/ली०) | 15.0-32.0 |
| कुल नाइट्रोजन (मि० ग्रा०/ली०) | 2.25-6.75 |
| नाइट्रेट-नाइट्रोजन (मि० ग्रा०/ली०) | 0.02-0.075 |
| फास्फेट (मि० ग्रा०/ली०) | 0.05-1.4 |
| सल्फेट (मि० ग्रा०/ली०) | 4.60-12 0 |

सारणी 2

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र पर उपलब्ध मल-जल में कुल घुलनशील ठोस पदार्थ तथा जैव-रासायनिक आक्सीजन माँग का स्तर

| क्रम सं० | पी० एच० | कुल घुलनशील लवण (मिग्रा०/ली०) | जैव-रासायनिक आक्सीजन माँग (मिग्रा०/ली०) |
|---|---|---|---|
| 1. | 7.1 | 270.80 | 106.20 |
| 2. | 7.2 | 432.43 | 96.00 |
| 3. | 7.6 | 388.20 | 120.30 |
| 4. | 7.2 | 376.30 | 98.40 |
| 5. | 7.5 | 392.40 | 115.70 |
| 6. | 7.3 | 188.20 | 96.60 |
| 7. | 7.1 | 320.60 | 150.40 |
| 8. | 7.3 | 196.20 | 103.10 |
| 9. | 7.1 | 395.80 | 116.00 |
| 10. | 7.2 | 402.30 | 115.20 |
| माध्य | 7.2 | 336.32 | 111.99 |

सारणी 3

शीलाधर मृदा-विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र उपलब्ध अवमल का पोषण मान (शुष्क भार के आधार पर)

| क्र० सं० | कार्बनिक कार्बन % | नाइट्रोजन % | फास्फोरस % | पोटाश % |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 1.20 | 2.5 | 2.0 | 0.50 |
| 2. | 1.14 | 2.0 | 1.5 | 0.48 |
| 3. | 1.18 | 2.2 | 1.6 | 0.50 |
| 4. | 1.22 | 2.6 | 2.2 | 0.52 |
| माध्य | 1.18 | 2.3 | 1 8 | 0.50 |

सारणी 4

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र पर उपलब्ध मल-जल में भारी धातुओं की सान्द्रता

| क्र० सं० | भारी धातुओं का सान्द्रता (पी० पी० एम० में) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Cd | Cr | Pb | Zn | Fe | Mn |
| 1. | 0.60 | 0.28 | 5.00 | 10.00 | 12.00 | 10.60 |
| 2. | 0.85 | 0.70 | 8.00 | 8.00 | 11.50 | 13.60 |
| 3. | 0.26 | 0.55 | 2.60 | 9.50 | 10.80 | 12.80 |
| 4. | 0.45 | 0.60 | 0.70 | 5.80 | 8.00 | 11.30 |
| माध्य | 0.55 | 0.58 | 3.52 | 8.32 | 10.57 | 12.12 |

सारणी 5

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र पर उपलब्ध अवमल के विभिन्न नमूनों में भारी धातुओं की सान्द्रता (पी० पी० एम० में)

| भारी धातुओं की विषाक्तता | नमूना संख्या 1 | 2 | 3 | 4 | माध्य |
|---|---|---|---|---|---|
| Cd | | | | | |
| कुल | 22 | 24 | 20 | 28 | 23.50 |
| डी० टी० पी० ए० निष्कर्षित | 1.47 | 1.62 | 1.39 | 1.89 | 1.57 |
| Cr | | | | | |
| कुल | 14 | 16 | 18 | 15 | 15.75 |
| डी० टी० पी० ए० निष्कर्षित | 0.85 | 0.88 | 0.94 | 0.87 | 0.88 |
| Pb | | | | | |
| कुल | 30 | 29 | 32 | 36 | 31.75 |
| डी० टी० पी० ए० निष्कर्षित | 0.60 | 0.58 | 0.70 | 0.78 | 0.66 |
| Zn | | | | | |
| कुल | 111 | 188 | 175 | 196 | 184.75 |
| डी० टी० पी० ए० निष्कर्षित | 12.80 | 16.20 | 12.00 | 18.40 | 14.80 |
| Fe | | | | | |
| कुल | 300 | 320 | 310 | 318 | 312.00 |
| डी० टी० पी० ए० निष्कर्षित | 82.00 | 82.60 | 80.00 | 81.50 | 81.50 |
| Mn | | | | | |
| कुल | 290 | 282 | 298 | 296 | 292.50 |
| डी० टी० पी० ए० निष्कर्षित | 48.20 | 46.00 | 50.40 | 52.20 | 49.20 |

सारणी 6

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र की मल-जल सिंचित तथा सामान्य मृदा में भारी धातुओं की सान्द्रता (मि० ग्रा०/कि० ग्रा०)

| उपचार | गहराई (सेमी०) | कैडमियम | | क्रोमियम | | लैड | | जिंक | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | कुल | डी.टी.पी.ए. निष्कर्षित | कुल | डी.टी.पी.ए. निष्कर्षित | कुल | डी.टी.पी.ए. निष्कर्षित | कुल | डी.टी.पी.ए. निष्कर्षित |
| वाहित मल-जल सिंचित | | | | | | | | | |
| | 0-10 | 2.2 | 0.31 | 9.1 | 0.09 | 4.4 | 2.8 | 108 | 2.22 |
| | 10-20 | 6.0 | 0.16 | 2.6 | 0.08 | 3.6 | 1.8 | 160 | 1.06 |
| | 20-30 | 4.0 | 0.12 | 4.4 | 0.10 | 3.2 | 1.3 | 130 | 1.46 |
| | 30-40 | 1.5 | 0.10 | 2.8 | 0.12 | 1.5 | 0.9 | 125 | 1.86 |
| सामान्य मृदा | | | | | | | | | |
| | 0-10 | 1.7 | 0.03 | 1.2 | 0.06 | 1.00 | 0.81 | 108 | 0.12 |
| | 10-20 | 0.62 | 0.12 | 0.8 | 0.01 | 0.92 | 0.34 | 120 | 0.26 |
| | 20-30 | 1.2 | 0.04 | 0·5 | 0.03 | 0.40 | 0.18 | 136 | 0.16 |
| | 30-40 | 0.55 | 0.02 | 0.6 | 0.02 | 0.38 | 0.08 | 116 | 0.12 |

## निर्देश

1. मिश्र, एस० जी०, श्रीवास्तव, सी० पी० तथा दिनेश मणि, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, 1988, **34**, 185-89.

2. क्लेइन, एल० ए०, लेंग, एम०, नाश, एन० तथा किर्सचर, एस० एल०, J. water pollut. control Fed., 1974, **46**, 1553-1662.

3. हर्म्स, यू० तथा ब्रूमर, जी० "Influence of different types of Natural Organic Matter on the solubility of Heavy Metals in soils". In Proc, "Environmental effect of organic and inorganic contaminants in sewage-sludge", held on May 25-26, 1982 at Stevenage.

4. मैनिवासकम, एन० Physico chemical examination of water, sewage and industrial effluent, Pragati Prakashan, Meerut, 1985.

5. FAO. Regional Seminar on the treatment and use of sewage effluent for irrigation, Nicosia Cyprus 7-9 Oct. 1985.

6. बॉडयर, एच० तथा चने, आर० एल०, Adv. Agron, 1974, **26**, 133-76.

7. नेशनल एकेडमी ऑफ साइन्सेज, नेशनल एकेडमी ऑफ इन्जीनियरिंग, 1973.
Water quality criteria 1972 : A report of the committee on water quality criteria, P. 232-253. EPA-$R_3$-73-033, U. S. Environmental Protection Agency, Washington, D. C.

8. प्राट, पी० एफ०, Quality criteria for trace elements in irrigation waters, 1972. University of California Experiment Station, Riverside, California.

9. डेविश, आर० डी०, Plant and Soil 1976, **49**, 375.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 4, 1994

# जोधपुर नगर में विभिन्न स्थानों पर जीवाणवीय वायु प्रदूषण का सर्वेक्षण

त्रिलोकचन्द टाक, अशोक कच्छवाहा, मूलचन्द सोनगरा एवं रामगोपाल
रक्षा प्रयोगशाला, जोधपुर-342001

[ प्राप्त—जुलाई 1, 1994 ]

## सारांश

जोधपुर नगर के वातावरण में जीवाणु, यीस्ट तथा मोल्ड की उपस्थिति ज्ञात करने के लिए "बायोटेस्ट आर० सी० एस० एयर सेम्पलर" तथा मानक कल्चर मीडिया की सहायता से एक अध्ययन किया गया। वर्ष के विभिन्न मौसमों में नगर की वायु गुणवत्ता जाँच के लिए किये गये अध्ययन से यह निष्कर्ष निकाला गया है कि पशु-आवास, सब्जीमण्डी तथा बेकरी में, वायु प्रदूषण इन सूक्ष्मजीवाणुओं के कारण अधिक है। जिन स्थानों में सूक्ष्मजीवाणुओं की संख्या 5 प्रति लीटर वायु से अधिक पाई गई उन क्षेत्रों में वायु-प्रदूषण अधिक है।

## Abstract

**A survey of microbial air pollution in Jodhpur city.** *By* Trilok Chand Tak, Ashok Kachhwaha, Mool Chand Songara and Ram Gopal, Defence Laboratory, Jodhpur.

A study on presence of bacteria, yeast and moulds in Jodhpur city environment was conducted using "Biotest RCS Air Sampler" and suitable culture media. Studies conducted in different seasons of a year on air quality of the city have revealed that area like cattle yard, vegetable market and bakery shop are contaminated with above microorganisms. It is also found that areas contaminated with 5 microorganisms per litre of air and above are polluted.

विश्व स्वास्थ्य संगठन के अनुसार विश्व में दिन-प्रति दिन प्रदूषण बढ़ता जा रहा है। यह प्रदूषण मानव, पेड़-पौधों तथा खाद्य सामग्री पर प्रतिकूल प्रभाव डालता है[1,2]। प्रदूषित वायु में उपस्थित

विशेष कण अपने आकार एवं घनत्व के अनुसार वातावरण में तैरते रहते हैं[3,4,5] जो कि मानव की जनसंख्या पर सीधा प्रभाव डालते हैं। अनेक वैज्ञानिकों ने[6,7,8] दूषित वायु का पेड़-पौधे की पत्तियों पर भी अध्ययन किया है। जीवाणवीय दूषित वायु का वातावरण में क्या प्रभाव पडता है इस विषय पर अभी तक कोई विस्तृत अध्ययन नहीं किया गया है। रक्षा प्रयोगशाला, जोधपुर ने वायु प्रदूषण पर विस्तृत अध्ययन शुरू किया है। इस अध्ययन के लिए एक नया उपकरण "बायोटेस्ट आर० सी० एस० एयर सेम्पलर" का प्रयोग किया गया तथा इस उपकरण की सहायता के माह मई, जुलाई व सितम्बर 1993 में तेरह भिन्न-भिन्न स्थानों से वायु के नमूने एकत्र किये गये। नमूने एकत्र करते समय बातावरण का ताप और आर्द्रता भी मापी गई।

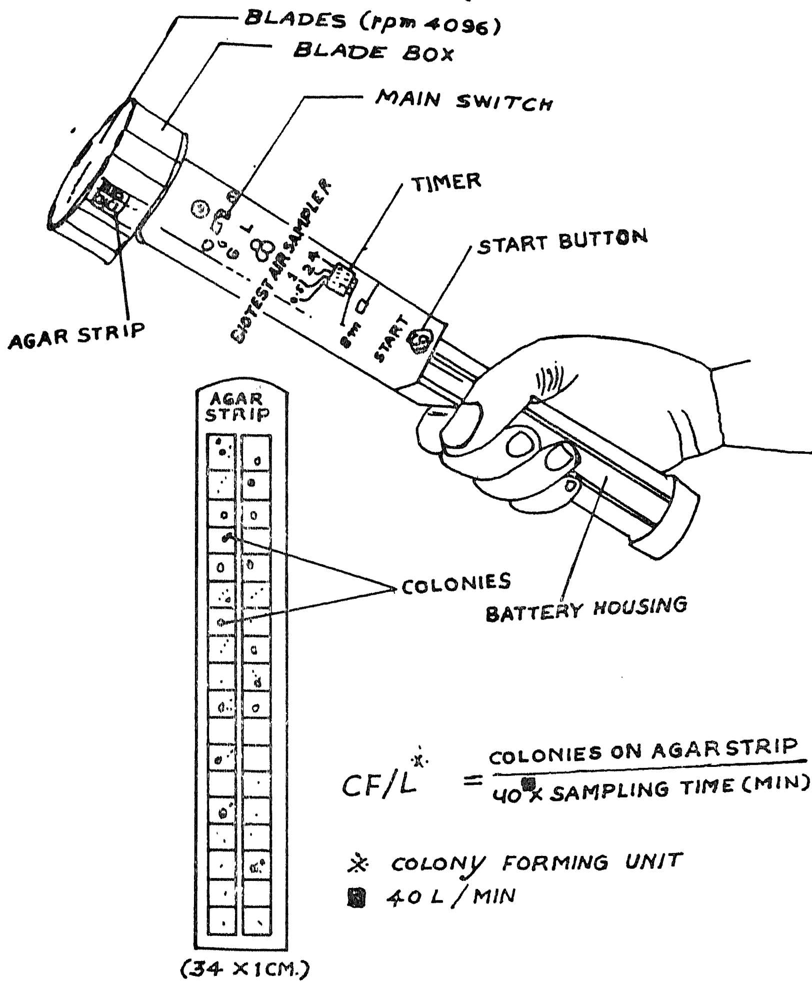
## प्रयोगात्मक

### सामग्री

बायोटेस्ट आर० सी० एयर सेम्पलर[9] (जर्मनी) एक हल्का (2.5 पौण्ड) टॉर्चनुमा, 34 सेमी० लम्बा जो 6 वोल्ट बैटरी (4 सेल) से संचालित उपकरण है (चित्र 1)। यह वायु में पाये जाने वाले सूक्ष्मजीवों को केन्द्रापसारी (सेन्ट्रीफ्युगल) माध्यम द्वारा अपनी ओर आकर्षित करके ऐगर-मीडियम पट्टिका पर एकत्रित करता है। इस उपकरण को चलाने के लिए 30 सेकण्ड से 8 मिनट का स्वचालित समय सूचकांक (टाइमर) लगा रहता है। यह उपकरण प्रति मिनट 40 लीटर वायु खींचने की क्षमता रखता है। इसके मुँह पर पंखा ड्रम में लगा रहता है जिसमें ऐगर-मीडियम की प्लास्टिक पट्टिका बाहर से ड्रम में डाली जाती है। इसमें पंखे की गति 4096 आर० पी० एम० होती है। ऐगर पट्टिका 24 सेमी० लम्बी तथा 3.5 सेमी० चौड़ी होती है जिसमें $34 \times 1 \times 1$ सेमी० की चौरस प्यालियाँ होती हैं। इन्हीं प्यालियों में ऐगर-मीडियम भरा रहता है।

सूक्ष्मजीवों की गणना न्यूट्रिएन्ट-ऐगर तथा यीस्ट व मोल्ड के लिए पोटैटो-डेक्सट्रोस-ऐगर मीडिया उपयोग में लाते हैं। उपर्युक्त मीडिया उपकरण के साथ मिलता है। भारतवर्ष में हाइमीडिया उपलब्ध है जिसका प्रयोग किया गया है[10]।

बायोटेस्ट एयर सेम्पलर वायु के नमूने एकत्र करने के लिए लक्ष्य से ठीक 40 सेन्टीमीटर दूर रखा जाता है। उपकरण को प्रयोग में लाने से पहले ऐल्कोहल द्वारा विसंक्रमित किया जाता है। हाथों में रबड़ के दस्ताने पहन कर ऐगर पट्टिका (विसंक्रमित) को ड्रम में प्रविष्ट करते हैं। लक्ष्य समय सूचकांक तय कर लिया जाता है। इच्छित समयानुसार (साधारणतया 1 मिनट) समय सूचकांक को निर्धारित कर स्विच को चालू किया जाता है। उपकरण को हाथ में लेकर चलते हुए वायु में आरों तरफ ऊपर-नीचे घुमाया जाता है। निर्धारित अवधि पूरी होने पर यह स्वतः बन्द हो जाता है। इसके बाद तुरन्त ऐगर पट्टिका को बाहर निकाल कर प्लास्टिक ढाट लगाकर इनकुबेटर में रख दी जाती है और समय नोट कर लिया जाता है। यदि न्यूट्रिएन्ट-ऐगर पट्टिका है तो 27° से० ताप पर 48 घन्टे तक इनकुबेटर में रखते हैं। बाद में पट्टिका को बाहर निकाल कर कॉलोनी काउन्टर पर लगा कर सभी प्यालियों में बनी जीवाणु कॉलोनियों की गणना कर लेते हैं। इसी प्रकार पोटैटो-डेक्सट्रोस-ऐगर पट्टिका को इनकुबेटर में


BLADES (rpm 4096)
BLADE BOX
MAIN SWITCH
TIMER
START BUTTON
BIOTEST AIR SAMPLER
START
AGAR STRIP
AGAR STRIP
COLONIES
BATTERY HOUSING
CF/L* = COLONIES ON AGAR STRIP / 40■ X SAMPLING TIME (MIN)
* COLONY FORMING UNIT
■ 40 L/MIN
(34 X 1CM.)

चित्र 1

28° से० से 30° से० ताप पर 48-72 घण्टे तक रखते हैं। इसके पश्चात् पट्टिका पर कालोनियों की गणना कर ली जाती हैं। इस पट्टिका पर दो प्रकार की कालोनियाँ बनती हैं। एक यीस्ट तथा दूसरी मोल्ड की। यीस्ट की बटन जैसी पीली व भूरे रंग की 1-2 मिमी व्यास की कालोनियाँ बनती हैं। मोल्ड की सफेद रुईनुमा, काली, भूरे रंग की कालोनियाँ बनती हैं। दोनों प्रकार की कालोनियों की संख्या प्रति लीटर वायु में दर्शायी जाती है। ठीक इसी प्रकार जीवाणुओं की भी गणना कर लेते हैं। परिणाम निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त किये जाते हैं।

$$\text{सी. एफ. यू (C. F. U.) प्रतिलीटर} = \frac{\text{पट्टिका पर बनी कॉलोनियों की संख्या}}{40 \times \text{नमूना एकत्रित करने की अवधि (1 मिनट)}}$$

इस विधि द्वारा तेरह स्थानों के वायु के एकत्रित नमूनों से प्राप्त परिणाम सारणी 1 में दर्शाये गये हैं।

**सारणी 1**

**जीवाणुओं तथा यीस्ट-मोल्ड की संख्या**

| जोधपुर शहर स्थान | 3 मई 1993 ताप 38°C 20% आर्द्रता | | 5 जुलाई 1993 ताप 40°C 48% आर्द्रता | | 7 सितम्बर 1993 ताप 36° 40% आर्द्रता | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | जीवाणु | यीस्ट-मोल्ड | जीवाणु | यीस्ट-मोल्ड | जीवाणु | यीस्ट-मोल्ड |
| सब्जी मण्डी (राई की बाग) | 7.80 | 4.75 | 8.60 | 6.35 | 22.30 | 19.00 |
| मुख्य बाजार (पुराना) | 3.30 | 2.90 | 7.80 | 5.5 | 11.30 | 14.60 |
| बेकरी की दूकान (जालोरीगेट) | 5.85 | 2.35 | 5.30 | 6.70 | 18.10 | 19.70 |
| पब्लिक पार्क (स्टेडियम) | 4.00 | 1.00 | 4.60 | 4.00 | 10.20 | 13.00 |
| पशुवाड़ा (5वीं रोड चौपासनी) | 10.5 | 0.80 | 9.70 | 8.10 | 24.70 | 22.40 |
| सिनेमाघर (नई सड़क) | 0.57 | 0.90 | 1.75 | 0.12 | 1.75 | 3.40 |
| डेयरी प्लान्ट (इन्डस्ट्रीज एरिया) | 3.40 | 0.70 | 8.80 | 3.10 | 16.10 | 20.20 |
| कपड़े का कारखाना | 1.75 | 0.45 | 0.31 | 0.12 | 2.10 | 8.65 |
| मिठाई की दूकान (नई सड़क) | 4.80 | 0.40 | 7.30 | 5.50 | 9.21 | 15.70 |
| आइसक्रीम फैक्ट्री (ओलम्पिक) | 3.40 | 0.37 | 5.40 | 6.20 | 15.30 | 18.45 |
| मच्छीबाजार (नई सड़क) | 4.70 | 0.20 | 6.20 | 3.10 | 19.70 | 16.48 |
| गन्दा नाला (रातानाडा) | 4.70 | 0.12 | 5.75 | 4.64 | 17.2 | 18.60 |
| मण्डोर पहाड़ी | 0.31 | 0.00 | 0.00 | 0.45 | 0.20 | 0,12 |

## परिणाम तथा विवेचना

उपर्युक्त 13 स्थानों के वायु नमूनों के परीक्षण द्वारा यह निष्कर्ष निकलता है कि पशुओं का बाड़ा, सब्जीमण्डी, बेकरी तथा मछली बाजार के समीप की वायु में हर माह जीवाणुओं की संख्या बढ़ती गई। साथ में यीस्ट-मोल्ड में भी बढ़ोत्तरी हुई। जीवाणु अधिक ताप (36-38°) तथा सामान्य आर्द्रता में अधिक पनपते हैं। अधिक आर्द्रता में जीवाणु कम पाये गये क्योंकि वायु का घनत्व बढ़ जाता है और वे वायु में ठहर नहीं पाते। दूसरी ओर, यीस्ट व मोल्ड अधिक आर्द्रता तथा कम ताप पर अधिक वृद्धि करते हैं। सबसे ज्यादा जीवाणु पशुओं के बाड़े की वायु में पाये गये क्योंकि पशुओं (गायों, भैंसों) की त्वचा खुली रहती है और शरीर पर बाल कम रहते हैं। जीवाणु इनकी त्वचा पर अपना जीवन-निर्वाह करने का अच्छा अवसर ढूँढ लेते हैं और उनकी त्वचा के रोमकूप से अपना भोजन प्राप्त करते हैं। यीस्ट-मोल्ड के स्पोर अधिक आर्द्रता और कम ताप पर अपनी गति तेज करने लगते हैं। यही कारण है कि सब्जीमण्डी और पशुओं के बाड़े की वायु में यीस्ट और मोल्ड अधिक संख्या में पनपते देखे गये। ये भोजन, सब्जी, फल व खुले पदार्थों पर भी पनपने लगते हैं और उन्हें नष्ट कर देते हैं। चारों ओर अनुकूल वातावरण में जीवाणु, यीस्ट और मोल्ड अत्यधिक संख्या में पाये गये जैसा कि सारणी 1 में दर्शाया गया है।

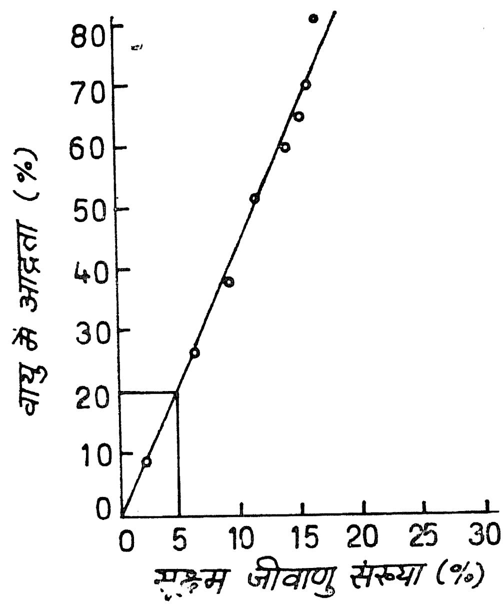
नंगे पहाड़ों पर (मंडोर) जहाँ वनस्पति नहीं है वहाँ जीवाणु, यीस्ट व मोल्ड की उपस्थिति की सम्भावना कम रहती है। लेकिन जहाँ वनस्पति अत्यधिक है और उसी के साथ ताप कम और आर्द्रता ज्यादा होती है वहाँ यीस्ट व मोल्ड असंख्य पाये जाते हैं। उन स्थानों पर त्वचा रोग एक आम बीमारी हैं तथा फलों व ब्रेड का सड़ना एक साधारण बात है। पर्वतीय क्षेत्र जैसे लेह-लद्दाख, कश्मीर तथा हिमालय के अनेक तलहटी भागों पर यीस्ट व मोल्ड अत्यधिक संख्या में पाये जाते हैं।

मनुष्यों के वातावरण में ऐसे जीवाणुओं का अत्यधिक होना हानिकारक बन सकता है। मुख्यतया जुकाम, फ्लू, चेचक, निमोनिया, डिफ्थीरिया, क्षयरोग, टॉन्सिल इत्यादि सूक्ष्मजीवाणुओं (बेक्टीरिया) द्वारा प्रभावित होते हैं। खाद्य-पदार्थों जैसे फल-अनाज, सब्जियाँ, रोटी, दूध, दही, मिठाइयाँ, अचार इत्यादि पर यीस्ट और मोल्ड का बुरा असर पड़ता है और वे उन्हे विषैले कर देते हैं। इनके अलावा ये जीवाणु मनुष्य, पशु-पक्षियों की त्वचा पर रोग उत्पन्न करते हैं।

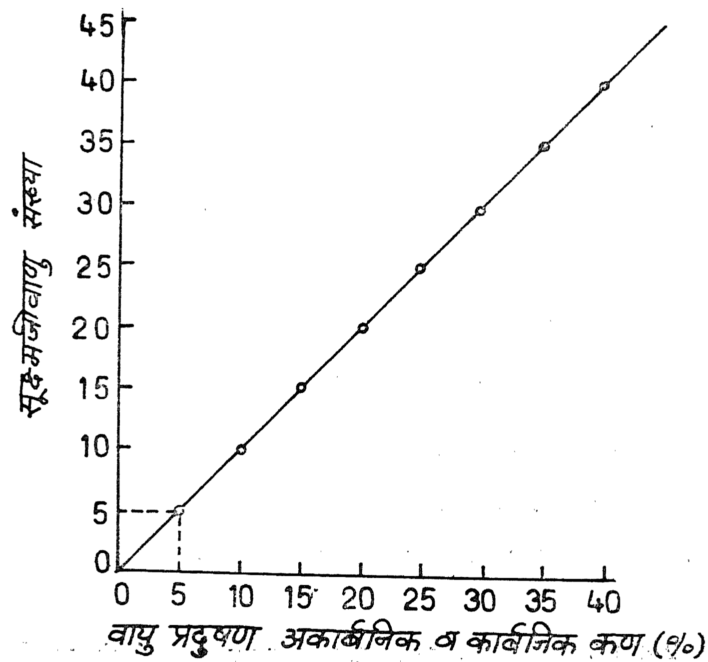
अतः इन जीवाणुओं और यीस्ट तथा मोल्ड का परीक्षण अत्यधिक महत्वपूर्ण है। सारणी 1 से यह निष्कर्ष निकलता है कि स्वच्छ वातावरण के लिए वायु में जीवाणु, यीस्ट और मोल्ड की संख्या प्रति लीटर 5 से ज्यादा नहीं होनी चाहिए।

इस सम्बन्ध में आगे शोध की आवश्यकता है ताकि इनका मानक बनाया जा सके क्योंकि वायु में उपस्थित जीवाणु, यीस्ट तथा मोल्ड का सीधा सम्बन्ध मनुष्य, पेड़-पौधे व खाद्य सामग्री की बीमारियों से हैं।

रेखाचित्र 2 तथा 3 के अनुसार प्रदूषण, आर्द्रता तथा सूक्ष्मजीवों की संख्या दर्शायी गई हैं।




चित्र 2 आर्द्रता का सूक्ष्म जीवाणु प्रदूषण पर प्रभाव




चित्र 3 वायु प्रदूषण में सूक्ष्मजीवाणुओं की संख्या का प्रभाव

सारणी 2

| वायु में जीवाणु संख्या (प्रति मिली०) | प्रदूषण मानक |
|---|---|
| 1—5 | अति उत्तम |
| 6—10 | उत्तम |
| >10 | अवांछित |

रेखाचित्रों एवं सारणी में दर्शाया गया है कि 20 प्रतिशत आर्द्रता पर सूक्ष्मजीवों की संख्या 5 से ज्यादा नहीं है अतः इसी सिद्धान्त पर आर्द्रता 20 प्रतिशत से कम तथा सूक्ष्मजीवों की संख्या प्रति लीटर 5 से ज्यादा नहीं होनी चाहिए। उपर्युक्त मानक स्वस्थ वातावरण के लिए उत्तम कहा जा सकता है।

## निर्देश


1. लेमन, एच० एम०, Proc. Soc· Exp. Bio. Med., 1943, **54**, 298.
2. सेनगर, सी० बी० एस०, बसीन, जे० के० तथा अग्रवाल, ए० एल०, Indian J. Env. Hlth, **32**, (1), 50-61.
3. होउग, एल०, Env. Poll. 2 Ed. Rinshort and Winston, New York, 1977, 46-55.
4. पानकेल्ट, एस० ए०, Nature, 1984, 311 तथा 299.
5. पासानेन, ए० एल०, नीकुलीन एम०, थोमानेन एम०, वर्ग, एस०, परीका, पी० तथा हिनतीका, ई० एल०, Atmospheric Environment, 1993, **27**, 9-13.
6. मिलर जे० डी०, Proc. 5th Int. Conf. Indoor Air Quality and Climate 1990, **5**, 51-65, Canada, Mortgage and Housing Corp; Ottawa.
7. चौधरी, जी० एस०, राव, एन० वी० तथा ईनामदार, जे० ए०, Indian J. Env. Hlth, 1984, **26**(3), 238-243.
8. विलियम, जी० वॉल्टर तथा रिचर्ड, एस० मेक्नी, Gen. Micro. 1962, 250-253.
9. Biotest RCS Air Sampler-A, G, D-6000, Frank Furt, W. Germany, 1994, Cat. No. 940011.
10. Hi-Media Laboratories P. Ltd., Bombay-400 086, India[

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 37, No. 4, 1994

# झाबुआ शहर में मलेरिया रोग : एक अध्ययन

मनमोहन प्रकाश, प्रचिती धर्माधिकारी, सोनाली चन्देल, अनामिका रघुवंशी
तथा मोनिका सक्सेना
स्नातकोत्तर प्राणिशास्त्र विभाग, श० च० आ० शासकीय
स्नातकोत्तर महाविद्यालय, झाबुआ (म० प्र०)

[ प्राप्त—जुलाई 5, 1994 ]

## सारांश

इस शोध-पत्र में झाबुआ शहर में मलेरिया रोग की स्थिति तथा सम्भावित उपायों का विश्लेषण किया गया है। प्राप्त परिणाम दर्शाते हैं कि 0 से 5 वर्ष आयु-समूह में मलेरिया का प्रभाव सबसे अधिक है जबकि 15 वर्ष से अधिक आयु-समूह में यह सबसे कम है। वाइवैक्स मलेरिया की तुलना में फाल्सी-पैरम मलेरिया के रोगियों की संख्या अधिक है। झाबुआ शहर में मलेरिया रोग से निपटने के लिए जहाँ एक ओर यह आवश्यक है कि सम्बन्धित विभाग उचित ध्यान दे, वहीं नागरिकों की जागरूकता तथा उनका सहयोग भी अपेक्षित है।

## Abstract

**Malaria in Jhabua town : A case study.** *By* Manmohan Prakash, Prachitee Dharmadhikari, Sonali Chandel, Anamika Raghuvansi and Monika Saxena. Post-graduate Department of Zoology, S. C. A. Govt. P. G. College, Jhabua (M. P.).

Authors have presented the existing condition of malaria and its possible remedy. The results showed that malaria affected 0 to 5 years age-group more than the age-group above 15 years. Patient suffering from falciparum malaria are greater in number in comparison to thc patient suffering from vivex malaria. It is concluded that to in order fight malaria this township requires on one side proper and immediate attention from the concerning Departments, while on the other side it is desirable that people get more conscious of the disease and its consequences and cooperate with proper authorties.

मच्छर द्वारा प्रसारित मलेरिया एक ऐसा प्राण-घातक रोग है जिसे सामान्य रोग माना जाता रहा है। अब यह बीमारी भारत सहित विश्व के 100 से अधिक देशों में महामारी का रूप ले चुकी है[1]। मनुष्य में यह रोग, मलेरिया-परजीवी की चार प्रजातियों—प्ला० वाइवैक्स, प्ला० मलेरियाई, प्ला० फाल्सीपैरम तथा प्ला० ओवल द्वारा फैलता है। उड़ीसा को छोड़कर शेष भारत में मलेरिया-परजीवी की प्रथम तीन प्रजातियाँ ही पायी जाती हैं[2]। रे[3] ने इस रोग के प्रकार, प्रसार, प्रकृति, प्रबन्धन आदि विषयों पर तथा ब्रूसी[4], वारेल[5] तथा रे[3] ने इस रोग के उपचार के तरीकों पर विशेष रूप से प्रकाश डाला है। सत्यनारायन[6] ने इस रोग की रोकथाम के लिए समुदाय-सहयोग की बात कही है।

झाबुआ मध्य प्रदेश के पश्चिम में स्थित (अक्षांश उत्तर 21.30° से 23.55° तथा देशांशपूर्व 73.30° से 75.01°) एक आदिवासीबहुल जिला है। इसके शहरी भाग में मलेरिया के प्रकोप का अध्ययन किया गया है। झाबुआ शहर समुद्र तल से 420 मीटर की ऊँचाई पर स्थित है।

## प्रयोगात्मक

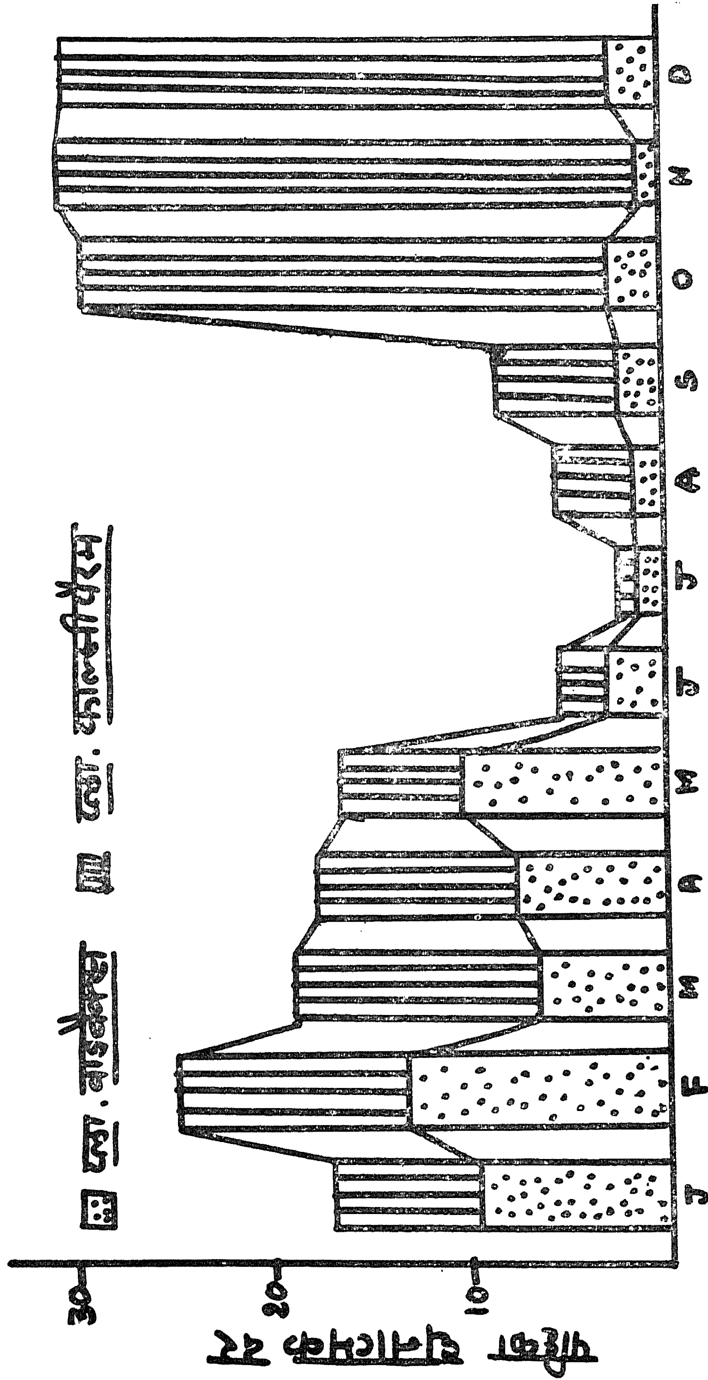
प्रस्तुत शोध-पत्र में झाबुआ शहर में सन् 1993 में मलेरिया रोग की स्थिति का विहंगावलोकन किया गया है। इसके लिए मलेरिया विभाग, झाबुआ के सहयोग से विभिन्न मोहल्लों तथा गलियों के बच्चे, बड़े, स्त्री तथा पुरुष के रक्त की जाँच करके मलेरियाग्रस्त रोगियों का पता लगाया गया है। पट्टिका धनात्मक दर, पट्टिका वाइवैक्स धनात्मक दर तथा पट्टिका फाल्सीपैरम धनात्मक दर को रे[3] द्वारा दिये गये सूत्रों से ज्ञात किया गया।

## परिणाम तथा विवेचना

मलेरिया रोग से सम्बन्धित प्राप्त परिणामों तथा उनसे प्राप्त परिणामों को सारणीबद्ध किया गया है तथा एक चित्र के द्वारा समझाया गया है।

सारणी 1 से स्पष्ट है कि झाबुआ शहर में जनवरी 1993 से जुलाई 1993 तक (मार्च-अप्रैल अपवाद है) प्ला० वाइवैक्स युक्त मलेरिया रोगियों का प्रतिशत अधिक रहा जबकि अगस्त 1993 से दिसम्बर 1993 तक प्ला० फाल्सीपैरम युक्त मलेरिया रोगियों का प्रतिशत अधिक रहा है। मलेरिया की पट्टिका धनात्मक दर जनवरी 1993 से मई 1993 तक (29.79 से 30.86) अधिक रही अर्थात् अक्टूबर से मई तक इस शहर में मलेरिया का प्रकोप अधिक रहा है। इस सम्बन्ध में यह सुझाव है कि झाबुआ शहर में स्थित तालाब (बहादुर सागर, मेहता तालाब, शंकर मन्दिर तालाब, रातितलाई तालाब तथा किशनपुरा निस्तार तलाब) में वर्षा से लबालब भर जाते हैं (इस शहर में सामान्यतः वर्षा मध्य जून से सितम्बर तक होती है)। वर्षा समाप्त होने पर ये स्रोत पानी स्थिर होकर सूखने तक (मई-जून) मच्छरों के लिए अनुकूल निवास-स्थान का कार्य करते हैं।

झाबुआ शहर में प्रस्तुत अध्ययन के लिए वर्ष 1993 में कुल 16,109 व्यक्तियों के रक्त का परीक्षण किया गया जिसमें से 529 में प्ला० वाइवैक्स तथा 1924 में प्ला० फाल्सीपैरम परजीवी पाये




चित्र 1

गये। इससे स्पष्ट है कि झाबुआ शहर में वाइवैक्स की तुलना में फाल्सीपैरम मलेरिया का प्रकोप अधिक है जो चिन्ता का विषय है। रे[3] के अनुसार फाल्सीपैरम परजीवी मलेरिया परजीवी की अन्य प्रजातियों की तुलना में अधिक घातक है क्योंकि अधिकांश रोगियों के सन्दर्भ में ये परजीवी प्रचलित दवा क्लोरोक्विन के प्रति प्रतिरोधी हो गये हैं तथा थोड़ी सी भी लापरवाही से ये रोगी के मस्तिष्क मे प्रवेश करने से नहीं चूकते। ऐसी स्थिति रोगी की जान भी ले सकती है।

**सारणी 1**

झाबुआ शहर में परजीवी तथा लिंग के आधार पर मलेरिया रोगियों का विवरण

| वर्ष 1993 माह | मानव की संख्या जिनके रक्त का परीक्षण किया गया | मानव की संख्या जिनके रक्त में मलेरिया परजीवी पाये गये | मलेरिया पट्टिका धनात्मक दर | मानव की संख्या जिनमें प्ला० वाइवैक्स परजीवी पाये गये | मानव की संख्या जिनमें प्ला० फाल्सीपैरम परजीवी पाये गये | प्ला० वाइवैक्स से ग्रसित रोगियों का प्रतिशत |
|---|---|---|---|---|---|---|
| जनवरी | 290 | 51 | 17.59 | 28 | 23 | 54.90 |
| फ़रवरी | 203 | 51 | 25.12 | 27 | 24 | 52.94 |
| मार्च | 288 | 56 | 19.44 | 20 | 36 | 35.71 |
| अप्रैल | 446 | 80 | 17.94 | 35 | 45 | 43.75 |
| मई | 920 | 156 | 16.96 | 100 | 56 | 64.10 |
| जून | 2903 | 153 | 05.30 | 92 | 62 | 59.74 |
| जुलाई | 3122 | 78 | 02.50 | 44 | 34 | 56.41 |
| अगस्त | 1472 | 80 | 05.43 | 28 | 52 | 35.00 |
| सितम्बर | 1020 | 86 | 08.43 | 25 | 61 | 29.07 |
| अक्टूबर | 2285 | 683 | 29.89 | 68 | 615 | 09.96 |
| नवम्बर | 2000 | 617 | 30.85 | 27 | 590 | 04.38 |
| दिसम्बर | 1160 | 358 | 30.86 | 32 | 328 | 08.94 |
| योग | 16,109 | 2,450 | 15.21 | 526 | 1,924 | 2147. |

| वर्ष 1993 माह | प्ला० फाल्सीपैरम से ग्रसित रोगियों का प्रतिशत | पुरुष रोगियों की संख्या | पुरुष रोगियों का प्रतिशत | स्त्री रोगियों की संख्या | स्त्री रोगियों का प्रतिशत |
|---|---|---|---|---|---|
| जनवरी | 45.10 | 23 | 45.10 | 28 | 54.90 |
| फरवरी | 47.06 | 30 | 58.82 | 21 | 41.18 |
| मार्च | 64.29 | 32 | 57.14 | 24 | 42,86 |
| अप्रैल | 56.25 | 38 | 47.50 | 42 | 52.50 |
| मई | 35.90 | 103 | 66.03 | 53 | 33.97 |
| जून | 40.26 | 98 | 63.64 | 56 | 36.36 |
| जुलाई | 43.56 | 37 | 47.44 | 41 | 52.56 |
| अगस्त | 65.00 | 45 | 56.25 | 35 | 43.75 |
| सितम्बर | 70.93 | 42 | 48.84 | 44 | 50.16 |
| अक्टूबर | 90.04 | 395 | 57.83 | 288 | 42.17 |
| नवम्बर | 96.62 | 393 | 63.70 | 224 | 36.30 |
| दिसम्बर | 91.06 | 149 | 41.62 | 209 | 58.38 |
| योग | 78.53 | 1,385 | 56.53 | 1,065 | 4643. |

सारणी 2 से स्पष्ट है कि प्ला० वाइवैक्स परजीवी 5 से 15 वर्ष आयु समूह को सबसे अधिक प्रभावित करते हैं जबकि 15 वर्ष से अधिक आयु समूह को सबसे कम। इन परजीवी की पट्टिका धनात्मक दर का अध्ययन किया गया (चित्र-1) तो यह पता चला कि ये परजीवी जनबरी से मई तक ही विशेष रूप से प्रभावी रहते हैं।

सारणी 3 से स्पष्ट है कि प्ला० फाल्सीपैरम परजीवी सबसे अधिक 0 से 5 वर्ष आयु समूह को तथा सबसे कम 15 वर्ष से अधिक आयु-समूह को प्रभावित करते हैं। इसका सम्भावित कारण यह हो सकता है कि 15 वर्ष से अधिक आयु समूह में इन परजीवियों के प्रति प्रतिरोधात्मक शक्ति विकसित हो जाती है तथा लोग मच्छरों के प्रति अधिक संवेदनशील तथा सचेत हैं। 0 से 5 वर्ष समूह में ऐसा नहीं पाया गया है। इस परजीवी की पट्टिका धनात्मक दर अक्टूबर से दिसम्बर (26.91 से 28.10) तक तथा जनवरी से अप्रैल (7.93 से 12.50) तक अधिक रही। इस प्रकार फाल्सीपैरम परजीवी वाइवैक्स परजीवी की तुलना में वर्ष में दो प्रभावी शिखर—एक छोटी तथा एक बड़ा-प्रस्तुत करते हैं (चित्र 1)।

सारणी 2

विभिन्न आयु समूह में प्ला० वाइवैक्स युक्त मलेरिया से ग्रसित मानव रोगियों का विवरण

| वर्ष 1993 माह | मानव की संख्या जिनके रक्त में प्ला० वाइवैक्स परजीवी पाये गये | पट्टिका वाइवैक्स धनात्मक दर | 0 से 5 वर्ष आयु समूह रोगियों की संख्या | रोगियों का % | 5 से 15 वर्ष आयु समूह रोगियों की संख्या | रोगियों का % | 15 वर्ष से अधिक आयु समूह रोगियों की संख्या | रोगियों का % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| जनवरी | 28 | 09.66 | 00 | 00.00 | 18 | 64.29 | 10 | 35.71 |
| फरवरी | 27 | 13.30 | 12 | 44-44 | 12 | 44.44 | 03 | 11.11 |
| मार्च | 20 | 06.94 | 05 | 25.00 | 10 | 50.00 | 05 | 25.00 |
| अप्रैल | 35 | 07.85 | 15 | 42.86 | 10 | 28.57 | 10 | 28.57 |
| मई | 100 | 10.89 | 25 | 25.00 | 38 | 38.00 | 37 | 37.00 |
| जून | 92 | 03.17 | 30 | 32.61 | 50 | 54.35 | 12 | 13.04 |
| जुलाई | 44 | 01.40 | 20 | 45.45 | 04 | 09.09 | 20 | 45.45 |
| अगस्त | 28 | 01.90 | 14 | 50.00 | 07 | 25.00 | 07 | 25.00 |
| सितम्बर | 25 | 02.45 | 15 | 60,00 | 05 | 20.00 | 05 | 20.00 |
| अक्टूबर | 68 | 02.98 | 23 | 33.82 | 19 | 27.94 | 26 | 38.24 |
| नवम्बर | 27 | 01.35 | 13 | 48.15 | 10 | 37.04 | 04 | 14.81 |
| दिसम्बर | 32 | 02.76 | 10 | 31.25 | 20 | 62.50 | 02 | 06.25 |
| योग | 526 | 03.27 | 182 | 34.60 | 203 | 38.58 | 141 | 26.81 |

**सारणी 3**

विभिन्न आयु समूह में प्ला० फाल्सीपैरम युक्त मलेरिया से ग्रसित मानव रोगियों का विवरण

| वर्ष 1993 माह | मानव की संख्या जिनके रक्त में प्ला० फाल्सीपैरम परजीवी पाये गये | पट्टिका फाल्सीपैरम धनात्मक दर | 0 से 5 वर्ष आयु समूह रोगियों की संख्या | रोगियों का % | 5 से 15 वर्ष आयु समूह रोगियों की संख्या | रोगियों का % | 15 वर्ष से अधिक आयु रोगियों की संख्या | रोगियों का % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| जनवरी | 23 | 07.93 | 00 | 00.00 | 11 | 47.83 | 12 | 52.17 |
| फरवरी | 24 | 11.82 | 12 | 50.00 | 10 | 41.67 | 02 | 08.33 |
| मार्च | 36 | 12.50 | 08 | 22.22 | 12 | 33.33 | 16 | 44.45 |
| अप्रैल | 45 | 10.09 | 20 | 44.44 | 25 | 55.56 | 00 | 00.00 |
| मई | 56 | 06.09 | 26 | 46.43 | 20 | 37.71 | 10 | 17.86 |
| जून | 62 | 02.14 | 30 | 48.39 | 20 | 32.26 | 12 | 19.35 |
| जुलाई | 34 | 01.09 | 14 | 41.17 | 08 | 23.53 | 12 | 32.29 |
| अगस्त | 52 | 03.53 | 23 | 44.23 | 20 | 38.46 | 09 | 17.31 |
| सितम्बर | 61 | 05.98 | 25 | 40.98 | 28 | 45.90 | 08 | 13.11 |
| अक्टूबर | 615 | 26.91 | 332 | 53.98 | 132 | 21.46 | 151 | 24.56 |
| नवम्बर | 590 | 29.59 | 331 | 56.10 | 140 | 23.73 | 119 | 20.17 |
| दिसम्बर | 326 | 28.10 | 105 | 32.21 | 109 | 33.44 | 112 | 34.36 |
| योग | 1924 | 11.94 | 926 | 48.13 | 535 | 27.81 | 463 | 24.06 |

## उपसंहार तथा सुझाव

इस शोध के माध्यम से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि झाबुआ शहर में अक्टूबर से मई तक इस रोग का प्रकोप अधिक होगा। प्ला० वाइवैक्स की तुलना में प्ला० फाल्सीपैरम मलेरिया परजीवी यहाँ के नागरिकों को अधिक प्रभावित करेंगे। अतः सभी प्रकार के सुरक्षात्मक तथा आक्रामक उपायों को तेज करना होगा। उचित होगा यदि यहाँ के तालाबों में मच्छर नियन्त्रक मछलियाँ छोड़ दी जावें तथा गड्ढों, नालियों आदि को निश्चित समय अन्तराल से नियमित रूप से उपचारित किया जाय। रोग की गम्भीरता को देखते हुए द्वार-द्वार जाकर रक्त की जाँच कर उपचार किया जाना चाहिए। इससे इस रोग को फैलने से कुछ सीमा तक रोका जा सकता है।

## कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण श० च० आ० शासकीय महाविद्यालय के प्राचार्य के आभारी हैं जिन्होंने हमें उक्त शोध करने की अनुमति प्रदान करते हुए विभागीय सुविधा उपलब्ध कराई। हम विशेष रूप से श्री मल्तारे सा० मलेरिया अधिकारी, जिला झाबुआ का उक्त शोध-कार्य एवं विचार-विमर्श में सहायता तथा मार्गदर्शन के लिए हृदय से आभार व्यक्त करते हैं।

## निर्देश

1. प्रकाश, एम० एम०, **वैज्ञानिक** 1993, **25**(4), 37-41
2. रे, ए० पी०, नरसिम्हम, एम० वी० वी० एल० तथा कलरा, एन० एल० Abrochure on Malaria, Published by Indian Society for Malaria and other Communicable Diseases, Delhi, 1991.
3. ब्रूसी, सी० एल० जे०, Chemotherapy of Malaria (2nd Edition) World Health Organisation, Geneva.
4. वारेल, डी० ए०, लोयरीसूवाइ, एस०, वारेल, एन० जे०, कासिमसभ. पी०, बूनांग, पी० तथा हरीनसूटा, टी० **न्यू ईंगलैण्ड जनरल ऑफ मेडिसिन** 1981, **306**, 313-319
5. सत्यनारायन, के०, **साइन्स रिपोर्टर**, जनवरी 1987, 57-58

# लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिये।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंगेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपोय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अँग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंगेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

८ लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) पचास रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

10. लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2" इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 60 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 15 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 60 *or* 12 £ *or* $ 40
Per Vol. Rs. 15 *or* 3 £ *or* $ 10

प्रकाशक :

विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद